Scheda di esercizi 10: forme bilineari simmetriche

(a) Data la forma su $\mathbb{R}^3$

$$B(v,w) = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + 3v_3w_3$$

verifica che è bilineare e simmetrica e studia il segno della forma quadratica associata.

Suggerimento: cerca un vettore v tale che $B(v,v) > 0$ e un vettore w tale che $B(w,w) < 0$

(b) Data la forma su $\mathbb{R}^4$

$$B(v,w) = 3v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 - \sqrt{2}v_2w_3 - \sqrt{2}v_3w_2 + v_2w_4 + v_4w_2$$

verifica che è bilineare e simmetrica e studiane il segno.

Suggerimento: cerca di scrivere $B(v,v)$ come una somma di quadrati

(c) Data la forma su $\mathbb{R}_2[t]$

$$B(p(t),q(t)) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

verifica che è bilineare e simmetrica e studiane il segno.

Suggerimento: prova a calcolare $B(p(t),p(t))$, dove $p(t) = at^2 + bt + c$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$.

(d) Data la forma su $\mathbb{R}_3[t]$

$$B(p(t),q(t)) = p(2)q(2) - p'(0)q'(0) - p''(1)q(3) - p(3)q''(1)$$

verifica che è bilineare e simmetrica e studiane il segno.

Suggerimento: prova a calcolare $B(p(t),p(t))$ scegliendo come $p(t)$ i polinomi della base canonica $\{1,t,t^2,t^3\}$

(e) Data la forma su $\mathbb{R}^4$

$$B(v,w) = v_1w_2 + v_2w_1 - \sqrt{2}v_1w_1 - 2v_2w_2 - v_3w_3 - v_4w_4 + v_2w_3 + v_3w_2$$

verifica che è bilineare e simmetrica e studiane il segno.

Suggerimento: cerca di scrivere $B(v,v)$ come una somma di quadrati.

SOLUZIONI: a) indefinita, b) semidefinita positiva, c) definita positiva, d) indefinita , e) definita negativa

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

(f) Per ciascuna delle forme definite negli esercizi (a), (b), (c), (d), (e) scrivi la matrice S associata, rispetto a una base a tua scelta. Per ciascuna di esse,

- verifica la proprietà di simmetria
- studia la degenericità della forma, calcolando il determinante della matrice
- studia il segno della forma utilizzando la matrice S associata e il criterio di Cartesio.

Soluzione del punto (d), rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$*:* $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -20 & -76 \\ 2 & -2 & -76 & -260 \end{pmatrix}$

(g) Data la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$B(v,w) = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3 - 4v_2w_3 - 4v_3w_2 + v_2w_1 + v_1w_2$$

e la base di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

scrivi

- la matrice S che rappresenta B rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$,
- la matrice S' che rappresenta B rispetto alla base $\mathcal{B}$,
- la matrice C di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
- Verifica infine che $S' = C^T SC$, cioè che S e S' sono congruenti.