

Esame di Algebra Lineare e Geometria. Ing. Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2016–2017. 16 Gennaio 2017

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Scrivi nome e cognome sul testo dell'esame (cioè questo foglio) e su ogni foglio protocollo che consegnerai. Non devi consegnare la brutta copia. Durante l'esame puoi consultare appunti e libri.

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ _____

Le risposte alle domande filtro devono essere giustificate. Negli esercizi vanno riportati tutti gli svolgimenti dei calcoli.

-
1. Esistono due matrici simmetriche invertibili la cui somma sia non invertibile?
 2. Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 - a \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)$?
 3. In \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare canonico, esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ a + 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale?

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k + 2a - 1 & 1 + a - k \\ 0 & k + a & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$

- (i) Trova gli autovalori di A_k ;
- (ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;
- (iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.

B. Data l'applicazione lineare $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita da $T(A) = A^T + A$

- (i) Scrivi la matrice associata a T rispetto a basi a tua scelta;
- (ii) trova dimensione e basi di $\text{Im}(T)$ e $\text{Ker}(T)$ e stabilisci se T è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
- (iii) Date le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 - a \\ 10 - a & a \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a + 2 \\ -a - 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 - a \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$ stabilisci se appartengono a $\text{Im}(T)$. Stabilisci se appartengono a $\text{Ker}(T)$.
- (iv) Stabilisci se $\text{Im}(T)$ e $\text{Ker}(T)$ sono spazi supplementari in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

C. Dati i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$W_k = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : (k - 1)x_1 + x_2 + (1 - k)x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + kx_3 - x_4 = 0 \right\}$$

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 - a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

- (i) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ calcola la dimensione e una base di W_k ;
- (ii) al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ calcola la dimensione e una base di $U \cap W_k$

Scelta turno orale: _____