

Esame di Geometria. Ing.Civile e Ambientale
Anno Accademico 2013–2014. 17 Gennaio 2014

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ _____

1. Se A è una matrice non nulla tale che $A^2 = 0$, allora è vero che $\det A = 0$?
2. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che i vettori $v_1 = (k - a)e_1$ e $v_2 = ke_1 + ke_2$ formano una base ortogonale di \mathbb{R}^2 ?
3. E' vero che la retta di equazione $\begin{cases} x + ay = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ e l'asse delle y sono rette sghembe?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Data la quadrica

$$\mathcal{Q}_k : x^2 + 2kxy + 2yz + 2z + a = 0$$

- (i) Trova, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui \mathcal{Q}_k è degenere e per tali valori classifica la quadrica.
- (ii) Classifica la quadrica per tutti gli altri valori del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- (iii) Poni $k = 2$ e sia \mathcal{C} la conica data dall'intersezione di \mathcal{Q}_2 con il piano di equazione $z = 0$. Classifica \mathcal{C} .
- (iv) Poni $k = 2$ e stabilisci se il punto $P = (0, -1 - a, \frac{1}{2})$ appartiene alla quadrica \mathcal{Q}_2 e in caso affermativo scrivi l'equazione del piano tangente a \mathcal{Q}_2 in P .

B. Data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sia $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'endomorfismo tale che $T(A) = MA$.

- (i) Scrivi la matrice associata a T rispetto a una base a tua scelta;
- (ii) trova gli autovalori di T e stabilisci se T e' diagonalizzabile;
- (iii) se possibile scrivi una base di autovettori;
- (iv) se possibile scrivi una base ortonormale di autovettori.

C. Dati i sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x + y + z + w = 0 \right\} \quad \text{e} \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} a \\ -2 \\ -a \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

- (i) Trova dimensione e basi di U e di W ;
- (ii) trova dimensione e basi di $U + W$ e di $U \cap W$;
- (iii) stabilisci se U e W sono sottospazi supplementari in \mathbb{R}^4 ;
- (iv) scrivi un sottospazio supplementare di U in \mathbb{R}^4 ;
- (v) scrivi equazioni cartesiane e parametriche di W^\perp .

Scelta turno orale: _____