Scritto di Geometria. Anno Accademico 2010–2011. 20 Gennaio 2011

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perché; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V, è vero che $\mathcal{C} = \{v_1+v_2+v_3, v_2+v_3+v_4, v_1+v_3+v_4, v_1+v_2+v_4\}$ è una base di V?

2. Esistono applicazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}_{(10-a)}[t]$ a $M_{2,3}(\mathbb{R})$?

3. I sottospazi $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - (10-a)z = 0 \right\}$ e $W = \mathrm{Span}(3t+1, (a+1)+t, at-2) \subseteq \mathbb{R}_3[t]$ hanno la stessa dimensione?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k+a & a & a \\ 0 & 6-a & 0 \\ 1-2k & a-5 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile trova una base di autovettori.

B. Data l'applicazione $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}_3[t] \times \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = (10-a)p(0)q(0) + 2p'(0)q(1) + 2p(1)q'(0)$$

(i) Dimostra che $\langle\, ,\, \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}_3[t]$;

(ii) scrivi la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto a una base a tua scelta;

(iii) stabilisci se è degenere e determina se è (semi)-definito positivo, negativo o indefinito.

C. Dato il sottoinsieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

(i) Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e trovane la dimensione.

(ii) Trova tutte le matrici $X \in W$ tali che $AX = B$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(iii) Trova tutte le matrici $Y \in W$ tali che $CY = YC$, dove $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iv) Stabilisci se $S = W \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Corso di laurea Ingegneria: __________________ **Scelta turno orale:**__________________