

# Membrane elastiche sottili fortemente pressurizzate

Salvatore Sergio Ligarò<sup>1</sup>, Riccardo Barsotti<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Pisa, Italia*  
*E-mail: s.ligarò@unipi.it, r.barsotti@unipi.it*

*Keywords:* Strutture gonfiabili, membrane elastiche, grandi spostamenti, corrugamento, metodi incrementali-iterativi.

**SOMMARIO.** In questo lavoro si propone un algoritmo numerico per determinare le forme di equilibrio di membrane elastiche sottili fortemente pressurizzate, soggette a corrugamento. Si ammette che ciascuna membrana, inizialmente piana, raggiunga la configurazione di equilibrio corrispondente ad un'assegnata pressione differenziale al termine di un processo di carico a quattro fasi che traducono l'introduzione e la successiva rimozione di una trazione piana fittizia antagonista che agisce uniformemente lungo l'intero bordo della membrana. Per tale via risulta possibile risolvere numericamente con grande accuratezza l'insieme delle equazioni che governano l'equilibrio elastico di tali elementi mediante una procedura appositamente messa a punto in cui si ha cura di mantenere la rigidità tangente della struttura sempre diversa da zero.

## 1 INTRODUZIONE

La diffusione di membrane tessili chiuse pressurizzate in ambito civile (le cosiddette “*membrane strutturali*” [1]) ha reso di stringente attualità il problema della determinazione dello stato di tensione che si origina durante il gonfiaggio delle membrane e delle modifiche che in esso si producono quando queste vengono successivamente poste in opera ed assoggettate ai previsti carichi di esercizio. Nonostante i numerosi studi rivolti, anche recentemente, verso questi temi, la soluzione di questo problema risulta una questione ancora aperta della meccanica delle strutture. In effetti, le numerose non linearità materiali e geometriche che caratterizzano questo problema rendono difficoltosa la sua soluzione.

Limitando l'attenzione al caso delle sole membrane strutturali, è facile rendersi conto come la natura, la composizione, l'orientamento e la particolare disposizione – trama ed ordito – scelta per i fasci di fibre resistenti che realizzano la superficie media della membrana, influenzino fortemente la risposta macroscopica del materiale composito risultante, particolarmente in corrispondenza a valori modesti della tensione [2], campo in cui le anisotropie immancabilmente presenti riescono a produrre cambiamenti del regime statico a volte inaspettati.

Al contrario, la risposta delle membrane fortemente pressurizzate (nelle quali le tensioni assumono valori elevati) appare dipendere in misura minore dalla microstruttura del materiale resistente. Per tali elementi strutturali è allora possibile descrivere la risposta del materiale attraverso l'adozione di un più semplice modello elastico lineare, attribuendo ai moduli elastici valori costanti facilmente deducibili per via sperimentale [3]; di conseguenza, l'attenzione si sposta sui fenomeni di non linearità geometrica, che risultano sempre presenti.

Una prima non linearità geometrica, definibile di tipo “*globale*” dal momento che interessa la membrana nella sua interezza, è dovuta alla grande distanza che in genere separa la configurazione iniziale, sgonfia e priva di sforzi, da quella che essa assume al termine del processo di gonfiaggio,

in cui la membrana è invece finalmente gonfia (volume racchiuso massimo, a parità di pressione differenziale agente) e fortemente sollecitata (fibre resistenti quasi completamente stirate). Per questo motivo, nell'analisi occorre tener conto di grandi spostamenti, accompagnati tuttavia da deformazioni piccole o moderatamente piccole [4].

Una seconda, ma non per questo trascurabile, fonte di non linearità geometrica, definibile per converso di tipo “*locale*”, poiché interessa porzioni limitate della superficie media deformata, è una conseguenza diretta dei valori estremamente piccoli della rigidezza flessio-torsionale della parete della membrana, al punto che lo spessore del composito risultante diviene una grandezza priva di significato ai fini della risoluzione del problema meccanico. Nella situazione di equilibrio, la superficie di una membrana pressurizzata è costituita da una distribuzione *a priori* incognita di zone tese e corrugate, tra di loro disgiunte, che influenzano fortemente la risposta locale (stato di tensione) e globale (deformabilità ed instabilità) dell'elemento resistente (Figura 1). Come notato da Reissner [5], il corrugamento stesso è fonte di anisotropia meccanica, nonostante il materiale impiegato sia isotropo. Non solo: l'anisotropia da corrugamento è del tipo più difficile da trattare dal punto di vista analitico, in quanto sia l'orientamento degli assi materiali che i valori dei moduli elastici costituiscono anch'essi delle incognite del problema.

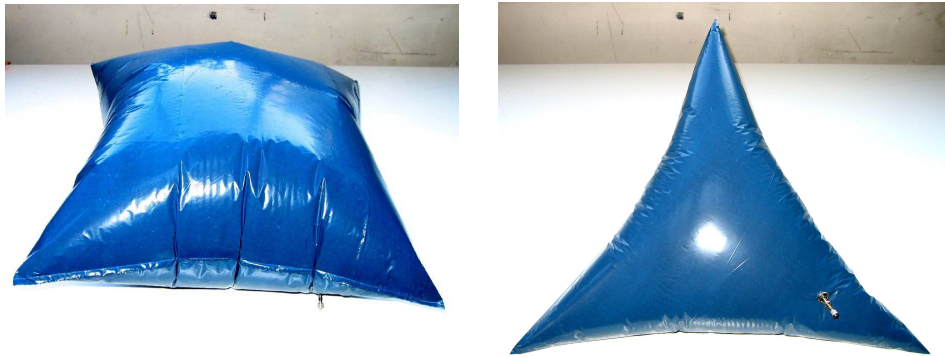


Figura 1: due esempi di membrane pressurizzate.

In questa memoria si propone un algoritmo numerico di tipo incrementale-iterativo per monitorare accuratamente l'evoluzione dello stato di sforzo nella membrana durante il processo di gonfiaggio. La membrana viene schematizzata mediante un semplice ma efficace modello meccanico recentemente proposto dagli autori per studiare le forme di equilibrio di membrane pressurizzate inestensibili [6]. In esso, le non linearità geometriche dovute al corrugamento della superficie sono tenute in conto mediante una non linearità fisica equivalente, ovvero, assumendo per il materiale un legame costitutivo a due stati: nello stato *attivo* la membrana è tesa e le fibre rispondono elasticamente; nello stato *passivo*, invece, la membrana può contrarsi liberamente senza dare origine ad alcuno sforzo di compressione.

L'equilibrio della membrana in ciascun passo incrementale del processo di carico viene imposto attraverso il principio dei lavori virtuali, mentre il legame costitutivo suddetto è inserito esplicitamente nel modello analitico. Il sistema di equazioni risultante è risolto iterativamente mediante una procedura numerica espressamente messa a punto, nella quale l'uso di carichi antagonisti fittizi permette di mantenere la rigidezza tangente dell'elemento strutturale sempre diversa da zero e di controllare con l'accuratezza richiesta l'evoluzione dell'intero processo di gonfiaggio. Per tale via, lo studio di molte situazioni pratiche relative a membrane elastiche di

forma iniziale generica e soggette a una grande varietà di condizioni al bordo può essere convenientemente affrontato. Gli esempi applicativi riportati di seguito riguardano alcuni casi ben documentati nella letteratura tecnica.

## 2 IL MODELLO MECCANICO

Il processo di gonfiaggio di una membrana elastica sottile ricorda per molti aspetti la risposta dei sistemi meccanici cinematicamente indeterminati (labili), quando si tenta di assoggettarli a dei carichi non compatibili staticamente. In entrambi i casi, il processo inizia sempre seguendo un ramo cinematico del percorso di equilibrio del sistema/membrana, lungo il quale una sequenza continua di cinematismi/configurazioni della superficie media, tutte quante prive di sforzo, si susseguono apparentemente in modo casuale, almeno su scala locale, sin quando un ramo statico viene incontrato. A questo punto il sistema dei carichi diviene compatibile e l'equilibrio s'instaura improvvisamente (i singoli componenti/la membrana entrano quasi istantaneamente in tensione). E' ovvio che una distribuzione casuale di piccoli difetti posti sulla superficie della membrana nella configurazione iniziale in qualche modo influenzerà lo stato di tensione che si realizzerà alla fine del processo di carico. Da un punto di vista puramente numerico, qualunque algoritmo, non importa quanto accurato questo possa essere, che parta da una configurazione iniziale priva di sforzo incontrerà la stessa situazione, dal momento che qualunque piccolo errore numerico può essere visto come un equivalente difetto nel modello meccanico.

Per minimizzare l'entità delle incertezze indotte dal corrugamento sulla valutazione dello stato di tensione nello stato finale e, nello stesso tempo, per migliorare la velocità di convergenza e la stabilità dell'algoritmo numerico, il processo di carico necessario per assoggettare una membrana elastica sottile ad una pressione differenziale assegnata  $p_{fin}$ , è qui suddiviso nelle quattro fasi separate, descritte schematicamente nella Figura 2.

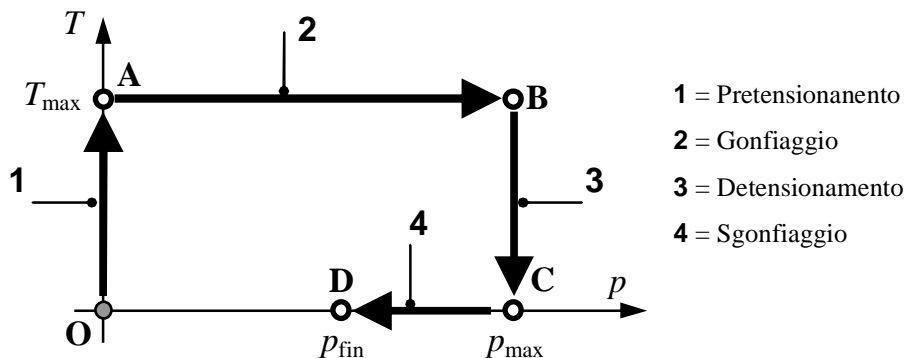


Figura 2: Schema del processo di carico

Nello stato iniziale, rappresentato dal punto  $O \equiv (0, 0)$ , la membrana è completamente piatta e priva di sforzo. Durante la Fase 1, una trazione uniforme  $T$ , via via crescente, agisce nel piano della membrana lungo l'intero suo bordo sin quando uno stato di dilatazione uniforme viene raggiunto in  $A \equiv (0, T_{max})$ . Durante la successiva Fase 2, una pressione differenziale  $p$  crescente agisce internamente sin quando lo stato  $B \equiv (p_{max}, T_{max})$  è ottenuto. Una quantità assai limitata di corrugamento, facilmente controllabile variando opportunamente i parametri  $p_{max}$  e  $T_{max}$ , è ora prodotta. Nella successiva Fase 3, la trazione  $T$  è gradualmente scalata a zero. Nel punto  $C \equiv (p_{max}, 0)$  ha inizio infine la fase di deflazione - Fase 4 - lungo la quale il corrugamento può

finalmente svilupparsi completamente sin quando la pressione raggiunge nel punto  $D \equiv (p_{fin}, 0)$  il valore finale assegnato. In tutte le quattro fasi descritte, l'analisi della risposta della membrana è effettuata utilizzando la medesima procedura incrementale-iterativa, sebbene la fase di pretensionamento possa essere effettuata impiegando anche un singolo passo di carico.

Durante tutti i cicli iterativi corrispondenti al generico passo incrementale, l'equilibrio si ottiene ricorrendo al principio dei lavori virtuali. In particolare, adottando una formulazione Lagrangiana totale, la possibilità di grandi spostamenti accompagnati da piccole o moderate deformazioni è tenuta in conto scegliendo il tensore di Green-Lagrange come misura appropriata della deformazione, mentre gli effetti del corrugamento sullo stato di equilibrio locale sono considerati attraverso una legge costitutiva elastica non lineare che fa uso del concetto di energia rilasciata, così come proposto da Pipkin [7].

Passando ai dettagli analitici, sia  $\Omega_0 \in \mathbb{R}^2$  la regione del piano  $(O, x, y)$  occupata dai punti del piano medio della membrana nella configurazione iniziale  $C_0$  e sia  $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^2$  la sua frontiera, costituita dall'unione di più archi di curve semplici e regolari. Indichiamo con  $t$  il valore dello spessore della membrana. Sia  $\mathbf{X}$  il vettore posizione di una particella rappresentativa del piano medio della membrana in  $C_0$  ed  $\mathbf{x}$  il vettore posizione della stessa particella nella configurazione attuale  $C$ . Sia  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$  il gradiente materiale della posizione,  $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$  il tensore lagrangiano di deformazione finita di Green ed  $\mathbf{S}$  il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, coniugato energeticamente ad  $\mathbf{E}$ . Ciò posto, indicando con  $\delta W$  il lavoro virtuale delle forze interne ed esterne compiuto per lo spostamento virtuale  $\delta \mathbf{x}$  associato alla deformazione virtuale  $\delta \mathbf{E}$ , con  $p$  la pressione differenziale agente sulla superficie  $\Omega_0$  ed infine con  $T$  il valore della trazione uniforme agente ortogonalmente al contorno  $\Gamma_0$ , nel piano della membrana, l'equilibrio della membrana durante ciascuna delle quattro fasi si impone risolvendo nella sequenza indicata i quattro problemi al contorno:

Fase 1: Pretensionamento da  $O \equiv (0, 0)$  a  $A \equiv (0, T_{max})$ ;  $p \equiv 0$ .

$$\begin{aligned} \delta W &= t \cdot \iint_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \cdot d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} T \mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_0 = 0, & \text{in } \Omega_0 \\ \delta v &= \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0 \text{ (condizione di semplice appoggio bilaterale liscio),} & \text{su } \Gamma_{0u} \\ \mathbf{FSn} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{FSn})\mathbf{k} &= T\mathbf{n}_0. & \text{su } \Gamma_{0p} \end{aligned} \quad (1)$$

Fase 2: Gonfiaggio da  $A \equiv (0, T_{max})$  a  $B \equiv (p_{max}, T_{max})$ ;  $T \equiv T_{max}$ .

$$\begin{aligned} \delta W &= t \cdot \iint_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \cdot d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} T_{max} \mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_0 - \iint_{\Omega_0} p\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 = 0, & \text{in } \Omega_0 \\ \delta v &= \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0, & \text{su } \Gamma_{0u} \\ \mathbf{FSn} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{FSn})\mathbf{k} &= T_{max} \mathbf{n}_0. & \text{su } \Gamma_{0p} \end{aligned} \quad (2)$$

Fase 3: Detensionamento da  $B \equiv (p_{max}, T_{max})$  a  $C \equiv (p_{max}, 0)$ ;  $p \equiv p_{max}$ .

$$\begin{aligned} \delta W &= t \cdot \iint_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \cdot d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} T \mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_0 - \iint_{\Omega_0} p_{max} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 = 0, & \text{in } \Omega_0 \\ \delta v &= \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0, & \text{su } \Gamma_{0u} \\ \mathbf{FSn} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{FSn})\mathbf{k} &= T\mathbf{n}_0. & \text{su } \Gamma_{0p} \end{aligned} \quad (3)$$

Fase 4: Sgonfiaggio da  $C \equiv (p_{max}, 0)$  a  $D \equiv (p_{fin}, 0)$ .

$$\begin{aligned}
\delta W &= t \cdot \iint_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \cdot d\Omega_0 - \iint_{\Omega_0} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 = 0, & \text{in } \Omega_0 \\
\delta v &= \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0, & \text{su } \Gamma_{0u} \\
\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{n} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{n}) \mathbf{k} &= \mathbf{0}. & \text{su } \Gamma_{0p}
\end{aligned} \tag{4}$$

In ogni fase il materiale obbedisce al legame costitutivo fornito in [7].

A ciascuna delle precedenti equazioni vettoriali corrisponde un sistema di tre equazioni scalari algebriche non lineari che può essere risolto in ambito FEM basandosi su uno schema risolutivo di tipo Newton-Raphson modificato. Negli esempi che seguono, i singoli problemi strutturali sono affrontati supponendo che la membrana sia capace di reagire soltanto a sforzi di trazione, per simulare la presenza del corrugamento. Per confronto, i casi dell'airbag quadrato e a croce sono stati studiati anche nell'ipotesi che il materiale costituente la membrana abbia un comportamento elastico lineare e possa quindi trasmettere sforzi di trazione e di compressione.

### 3 RISULTATI NUMERICI

#### 3.1 Airbag quadrato

Questo primo esempio è un classico test di confronto [8]. Nella configurazione iniziale, l'airbag quadrato è piatto, ha una diagonale di 1200 mm di lunghezza ed uno spessore uniforme di 0.6 mm. Il materiale è elastico lineare, omogeneo ed isotropo, con  $E = 588 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0.4$ . Una pressione differenziale  $p = 5 \text{ kPa}$  agisce internamente. Stante la simmetria del problema, solo un quarto della parte superiore dell'airbag è stato modellato, utilizzando complessivamente 663 g.d.l.

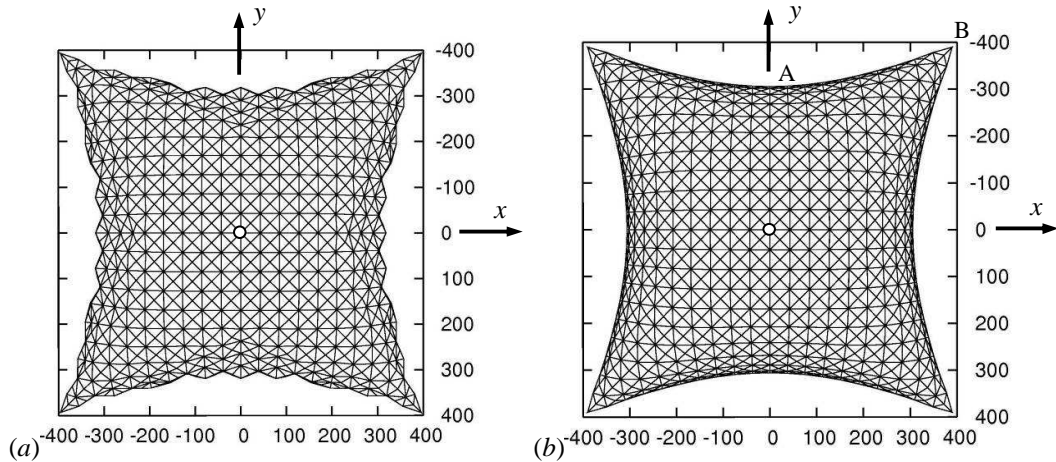


Figura 3: vista dall'alto dell'intero airbag (dimensioni in mm): (a) compressioni ammesse; (b) solo trazioni ammesse.

Nel caso in cui si ammettano anche sforzi di compressione (Figura 3a), lo spostamento verticale del centro dell'airbag è di 20.0 cm; i valori medi delle tensioni normali nei 16 elementi disposti intorno all'origine sono pari a:  $\sigma_{xx} = 4.82 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{yy} = 4.76 \text{ MPa}$ . Al contrario, se si assume che la membrana sia del tutto incapace di trasmettere sforzi di compressione (Figura 3b), lo spostamento verticale del centro dell'airbag risulta di 21.5 cm; lo spostamento orizzontale del

punto A e quello del punto B misurato lungo la diagonale del quadrato sono pari rispettivamente a 11.9 cm e 4.9 cm. I valori medi delle tensioni normali nei 16 elementi disposti intorno all'origine sono pari in questo caso a  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 3.92 \text{ MPa}$ . Questi risultati sono in ottimo accordo con quelli ottenuti recentemente da altri autori [4, 9].

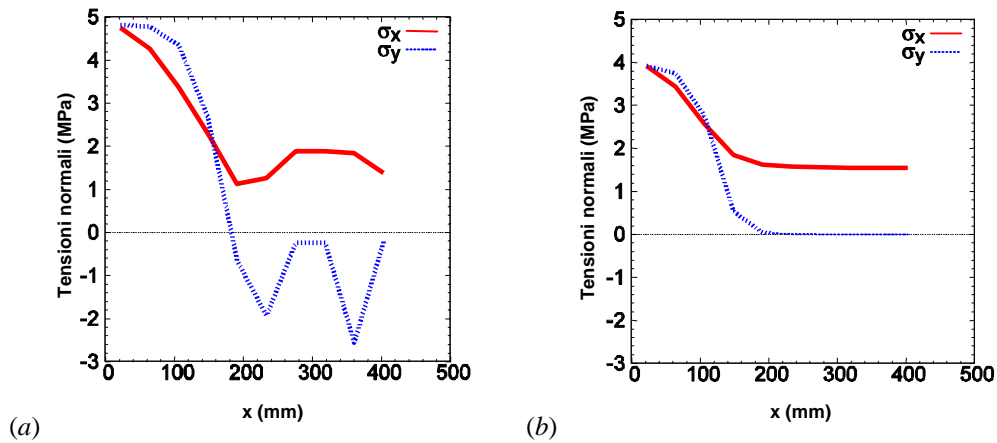


Figura 4: grafico dei valori di  $\sigma_{xx}$  (linea continua) e  $\sigma_{yy}$  (linea tratteggiata) lungo l'asse x: (a) compressioni ammesse; (b) solo trazioni ammesse.

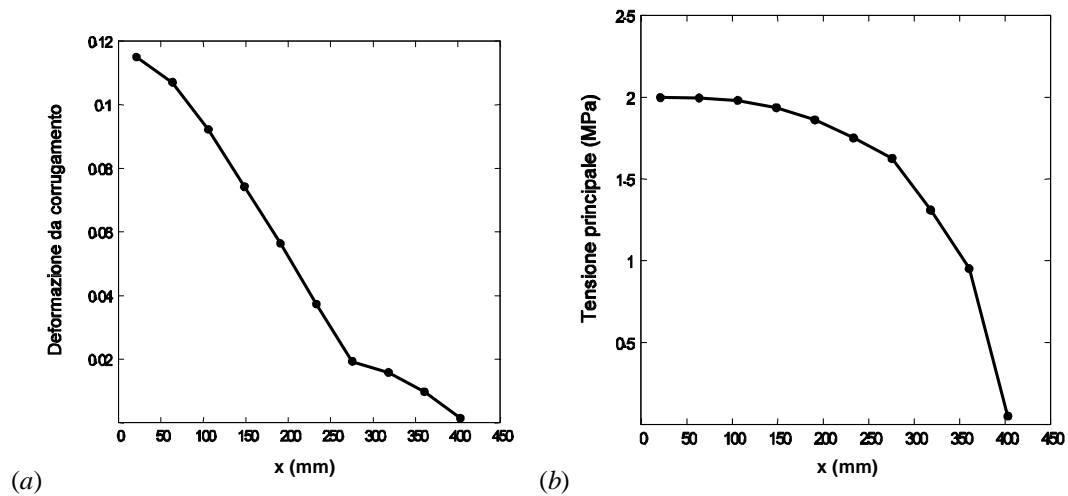


Figura 5: grafico dei valori principali della deformazione da corrugamento (a) e della tensione (b) lungo il lato AB.

Nel caso (a) le compressioni presenti nella parte esterna dell'airbag sono responsabili per la presenza delle pieghe (mesh dipendenti) osservabili sul bordo del quadrato. È opportuno osservare come, anche in questo caso, la procedura numerica sia in grado di ottenere un airbag dalla forma regolare e simmetrica, con una distribuzione di piegature pressoché uniformemente distribuite lungo il contorno.

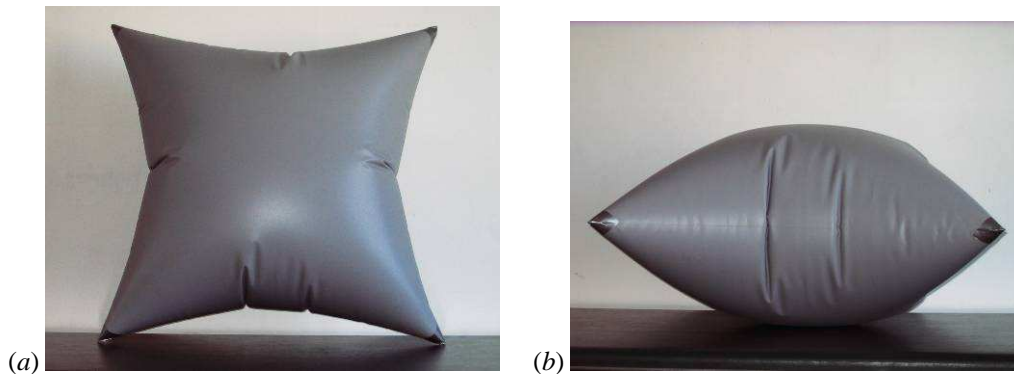


Figura 6: modello sperimentale di airbag quadrato in PVC rinforzato da fibre in poliestere; (a) vista dall'alto; (b) vista laterale.

Sperimentalmente si osserva come i corrugamenti della superficie tendano a concentrarsi in poche pieghe molto marcate al centro dei lati (Figura 6), a causa della presenza di imperfezioni iniziali della superficie, anche molto piccole. Questo fenomeno non può essere riprodotto con il modello qui illustrato. Nonostante ciò, i risultati numerici sono in buon accordo con quelli sperimentali per quanto riguarda i valori dello spostamento dei punti ritenuti maggiormente rappresentativi e l'andamento delle deformazioni da corrugamento (più elevate al centro dei lati).

### 3.2 Airbag rettangolare

Questo secondo esempio è una semplice variazione del problema esaminato precedentemente. In particolare, ci proponiamo di verificare quanto si estenda la zona corrugata lungo il lato maggiore del rettangolo. Nella configurazione iniziale l'airbag è piatto e di forma rettangolare. I lati sono lunghi rispettivamente  $a = 1800 \text{ mm}$  e  $b = 566 \text{ mm}$ , mentre lo spessore della membrana è di  $0.6 \text{ mm}$ . Come nel caso precedente, il materiale è elastico lineare, omogeneo ed isotropo, con  $E = 588 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0.4$ . Una pressione differenziale  $p = 5 \text{ kPa}$  agisce internamente.

I risultati numerici sono mostrati nelle Figure 7 e 8. Come atteso, nella parte centrale l'airbag appare di forma cilindrica, con un rapporto tra diametro e lunghezza complessiva di 1:5. Il forte corrugamento che interessa le parti terminali si estingue pressoché completamente a una distanza che risulta circa pari alla larghezza del rettangolo nella configurazione iniziale (Figura 8a). Nel tratto centrale, la distribuzione delle tensioni è con buona approssimazione uno stato monoassiale di sforzo con tensione costante (Figura 8b). I risultati sperimentali sembrano essere in accordo con quelli ottenuti numericamente (Figura 9).

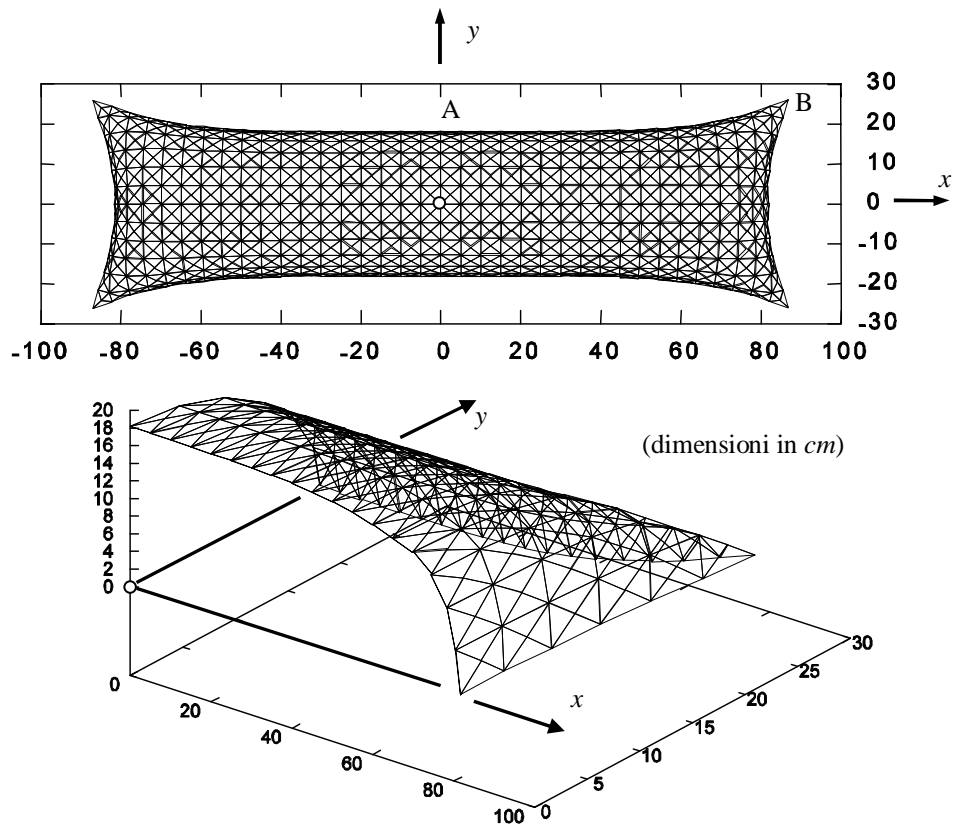


Figura 7: vista dall'alto dell'intero airbag (sopra) e assonometria di un quarto del modello (sotto).

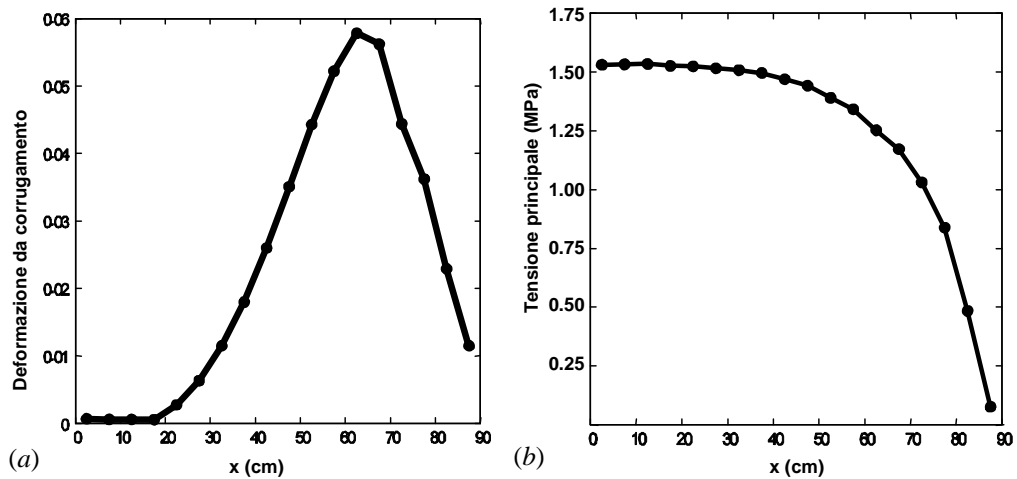


Figura 8: grafico dei valori principali della deformazione da corrugamento (a) e della tensione (b) lungo il lato AB.





Figura 9: modello sperimentale di airbag rettangolare in PVC rinforzato da fibre in poliestere; vista dall'alto (a sinistra); vista laterale (a destra).

### 3.3 Airbag a croce

Questo problema è stato proposto di recente in [10]. Anche in questo caso, per simmetria, il modello numerico è limitato ad un quarto della parte superiore dell'airbag, per un totale di 843 g.d.l. Nel caso in cui per il materiale costituente la membrana si assuma un comportamento elastico lineare a trazione e a compressione (Figura 10a), si osserva una distribuzione pressoché uniforme di pieghe lungo il bordo dell'airbag, la cui forma ed ampiezza dipende dalla mesh adottata. Ciò nonostante, anche in questo caso il procedimento numerico utilizzato è in grado di ottenere una forma regolare, rispettosa delle simmetrie presenti nello schema strutturale.

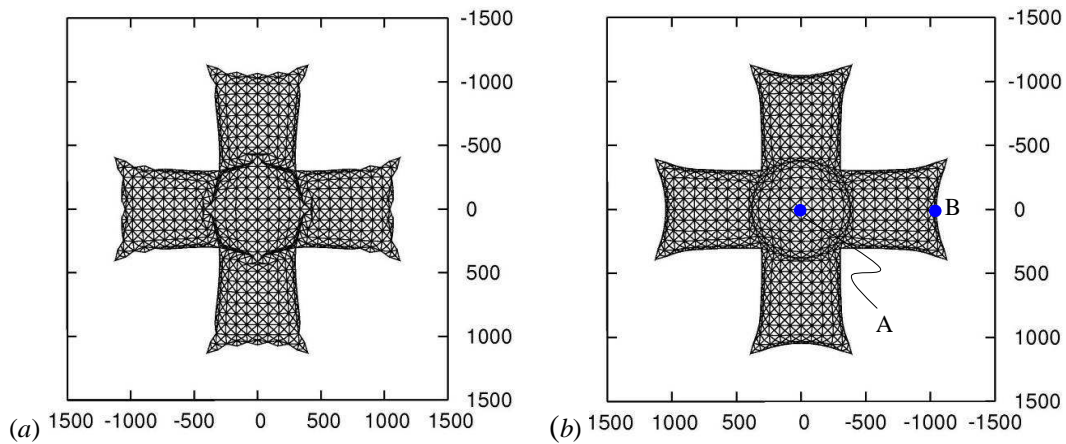


Figura 10: vista dall'alto dell'intero airbag (dimensioni in *mm*): (a) compressioni ammesse; (b) solo trazioni ammesse.

Nel caso in cui si ammettano soltanto trazioni, lo spostamento verticale del punto centrale A risulta pari a 35.6 cm, mentre lo spostamento orizzontale del punto B è di 22.7 cm. Le deformazioni da corrugamento maggiori si registrano negli elementi posti all'intersezione tra il quadrato centrale e le parti laterali dell'airbag, oltre che lungo i bordi esterni. I risultati numerici sembrano essere in accordo con quelli reperibili in letteratura.

#### 4 CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato illustrato un algoritmo numerico per la determinazione delle forme di equilibrio di membrane elastiche sottili fortemente pressurizzate, soggette a corrugamento, inizialmente piane. Il procedimento numerico sviluppato prevede una sequenza di quattro fasi di carico, che traducono l'introduzione e la successiva rimozione di una trazione piana fittizia antagonista che agisce uniformemente lungo l'intero contorno della membrana. Per tale via risulta possibile risolvere numericamente con grande accuratezza l'insieme delle equazioni che governano l'equilibrio elastico delle membrane, avendo altresì cura di mantenere sempre diversa da zero la rigidità tangente della struttura. In tutti e tre gli esempi applicativi considerati, i risultati numerici appaiono in buon accordo con le osservazioni sperimentali e con i risultati reperibili in letteratura.

#### *References*

- [1] Foster B. and Mollaert M., *European design guide for tensile surface structures*, TensiNet Ed., Brussels (2004).
- [2] Turner A.W., Kabche J.P., Peterson M.L. and Davids W.G., Tension/Torsion Testing on Inflatable Fabric Tubes, *Experimental Techniques*, Vol. **32**, N. 2, 47-52 (2008).
- [3] Galliot C. and Luchsinger R.H., A simple model describing the non-linear biaxial tensile behaviour of PVC-coated polyester fabrics for use in finite element analysis, *Composite Structures*, Vol. **90**, N. 4, 438-447 (2009).
- [4] Lee E.S. and Youn S.K., Finite element analysis of wrinkling membrane structures with large deformations, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **42**, 780-791 (2006).
- [5] Reissner E., On tension field theory, *Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech.*, 88-92 (1938).
- [6] Ligarò S.S. and Barsotti R., Equilibrium shapes of inflated inextensible membranes, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **45**, N. 21, 5584-5598 (2008).
- [7] Haseganu E.M. and Steigmann D.J., Analysis of partly wrinkled membranes by the method of dynamic relaxation, *Computational Mechanics*, Vol. **14**, 596-614 (1994).
- [8] Contri P. and Schrefler B.A., A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a no-compression material model, *Commun. Appl. Numer. Methods*, Vol. **4**, 5-15 (1988).
- [9] Jarasjarungkiat A., Wüchner R. and Bletzinger K.U., A wrinkling model based on material modification for isotropic and orthotropic membranes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **197**, 773-788 (2008).
- [10] Ziegler R., Wagner W. and Bletzinger K.U., A multisurface concept for the finite-element analysis of wrinkling membranes. *Proc. IASS-IACM 2000*, Fourth Int. Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, Chania - Crete, Greece, June 5-7 (2000).