

Vibrazioni nonlineari della piastra laminata in risonanza esterna ed interna: formulazione ed analisi di un modello con curvature nonlineari

Eduardo Saetta¹, Giuseppe Rega¹

¹ *Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Sapienza Università di Roma, Italia*
E-mail: e.saetta@virgilio.it, giuseppe.rega@uniroma1.it

Parole chiave: materiali compositi, dinamica nonlineare, interazioni modali.

SOMMARIO. Il lavoro ha per oggetto la formulazione e l'analisi dinamica nonlineare di un modello per la piastra in compositi laminati. Nella fase di modellazione vengono considerate espressioni nonlineari per le curvature, contrariamente alle più utilizzate teorie alla von Karman. Il modello ottenuto viene discretizzato nel dominio dello spazio tramite la procedura di Galerkin, ed il conseguente modello ridotto viene risolto tramite il metodo perturbativo delle scale multiple. I risultati numerici riguardano casi di vibrazioni forzate in condizioni di risonanza esterna ed interna. Vengono effettuati confronti tra modelli ed indagini fenomenologiche al variare di parametri significativi.

1 INTRODUZIONE

I materiali compositi *laminati*, realizzati tramite l'impilamento di singole lamine fibro-rinforzate, sono oggi molto usati per costruire elementi strutturali di tipo piastra, grazie alle loro ottime caratteristiche meccaniche ed alla loro flessibilità di progetto.

Nell'ambito della modellazione bidimensionale della piastra laminata, vengono solitamente utilizzate le note teorie strutturali della piastra omogenea, opportunamente generalizzate per il caso di materiale laminato tramite la cosiddetta riduzione ESL (*equivalent single layer*) [1]. La maggior parte di queste teorie tiene conto delle nonlinearità geometriche utilizzando le deformazioni alla von Karman, in associazione alla teoria classica della piastra (Kirchhoff) oppure a teorie con varie ipotesi di deformazione a taglio (Mindlin, Reissner, Reddy) [1][2]. Tutte queste teorie utilizzano quindi curvature lineari, in un contesto talvolta variazionalmente incoerente, e trascurano il cambiamento di configurazione nel legame curvature-spostamenti.

D'altro canto, Nayfeh e Pai [2][3] osservano che tutte le nonlinearità geometriche trascurate nelle teorie alla von Karman potrebbero essere significative nell'analisi nonlineare della piastra composita, e che quindi tali nonlinearità non hanno avuto l'attenzione che meriterebbero nello studio della relativa dinamica nonlineare. Sulla base di queste osservazioni, Pai e Nayfeh sviluppano una teoria generale della piastra composita [3] che considera in modo rigoroso tutte le nonlinearità geometriche in gioco, pervenendo così ad un modello asintotico con curvature nonlineari, approssimato al terzo ordine. Detto modello risulta però troppo complesso per essere analizzato tramite vie prevalentemente analitiche, né sono presenti in letteratura analisi di modelli semplificati che contemplino una qualche forma di nonlinearità nelle espressioni delle curvature.

Dunque, l'obiettivo di questo lavoro è estrarre dalla teoria generale un sottomodello con curvature nonlineari, che risulti sufficientemente semplice da poter essere analizzato in campo dinamico con tecniche prevalentemente analitiche, e confrontato con gli usuali modelli a curvature

lineari [4]. Formulato tale modello, l'approccio di analisi prevede una preventiva discretizzazione nel dominio dello spazio, ed un successivo trattamento del risultante modello ridotto tramite metodi perturbativi e numerici. I risultati numerici riguardano casi di vibrazioni forzate in condizioni di risonanza esterna ed interna. Vengono effettuati confronti tra modelli ed indagini fenomenologiche al variare di parametri significativi.

2 MODELLAZIONE AL CONTINUO

2.1 Premessa ed ipotesi iniziali

Nell'ambito delle teorie bidimensionali, la variazione di configurazione della piastra può essere descritta componendo due aspetti:

- la deformazione del piano di riferimento;
- la deformazione della normale al piano di riferimento.

A partire dalle possibili ipotesi iniziali che approssimano la variazione di configurazione, la deduzione matematica degli aspetti di congruenza, equilibrio dinamico e legame costitutivo conduce a modelli differenti in termini di spostamento (Fig.1). I principali modelli ESL della letteratura possono essere derivati come casi particolari dalla teoria generale presentata da Pai e Nayfeh nel 1991 [3]; la Tab.1 mostra le caratteristiche cinematiche di alcuni di tali modelli, insieme ai modelli MGCLPT e ICLPT sviluppati in questa sede. (Sigle esplicitate in Appendice).

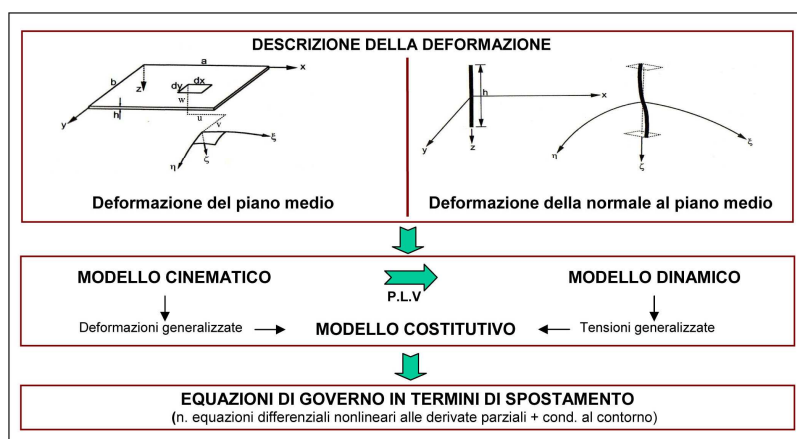


Fig. 1: Schema logico delle teorie bidimensionali

	GTSDT	GFSDT	GCLPT	TSDT	FSDT	CLPT	MGCLPT	ICLPT
Ordine di grandezza di u, v, w	$u = 0(\varepsilon)$ $v = 0(\varepsilon)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon)$ $v = 0(\varepsilon)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon)$ $v = 0(\varepsilon)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon^2)$ $v = 0(\varepsilon^2)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon^2)$ $v = 0(\varepsilon^2)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon^2)$ $v = 0(\varepsilon^2)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon^2)$ $v = 0(\varepsilon^2)$ $w = 0(\varepsilon)$	$u = 0(\varepsilon^2)$ $v = 0(\varepsilon^2)$ $w = 0(\varepsilon)$
Effetto di γ_6 sul camb. di config.	trascurato ovunque	trascurato ovunque	trascurato ovunque	trascurato ovunque	trascurato ovunque	trascurato ovunque	trascurato solo sui bordi	trascurato solo sui bordi
Legge di trasf. dei riferimenti	nonlineare	nonlineare	nonlineare	lineare	lineare	lineare	nonlineare	nonlineare ridotta
Deformazioni membranali	3° ordine	3° ordine	3° ordine	2° ordine	2° ordine	2° ordine	2° ordine	2° ordine
Curvature flessionali e torsionali	3° ordine	3° ordine	3° ordine	1° ordine	1° ordine	1° ordine	3° ordine	3° ordine
Curvature spirali	2° ordine	2° ordine	2° ordine	assenti	assenti	assenti	assenti	assenti
Deformazioni trasversali a taglio	3° ordine	1° ordine	assenti	3° ordine	1° ordine	assenti	assenti	assenti

Tab. 1: Caratteristiche cinematiche di alcuni modelli

Nella piastra classica alla von Karman (CLPT) si assumono per le deformazioni estensionali nel piano medio le seguenti espressioni nonlineari funzioni degli spostamenti u , v , w (Fig.1):

$$e_1 = u_x + \frac{1}{2}w_x^2, \quad e_2 = v_y + \frac{1}{2}w_y^2, \quad \gamma_6 = u_y + v_x + w_x w_y \quad (1)$$

mentre per le curvature di tale piano si assumono le seguenti espressioni lineari:

$$k_1 = -w_{xx}, \quad k_2 = -w_{yy}, \quad k_6 = 2k_{61} = 2k_{62} = -2w_{xy}, \quad k_4 = k_5 = 0 \quad (2)$$

Dal confronto con le deformazioni della teoria generale emerge che le (1) sono correttamente approximate al 3° ordine solo se gli spostamenti nel piano medio u e v sono di 2° ordine o superiore rispetto allo spostamento trasversale w . Tuttavia, sotto la stessa ipotesi, le curvature lineari (2) non sono coerenti, perchè dovrebbero contenere alcuni termini quadratici e cubici che non sono trascurabili. Allo scopo di conservare le deformazioni estensionali (1) ma di superare l'incoerenza sulle curvature (2), poniamo nella teoria generale [4] le seguenti *ipotesi iniziali*:

- Si assume come ordine di grandezza per gli spostamenti: $w = 0(\varepsilon)$, $u = 0(\varepsilon^2)$, $v = 0(\varepsilon^2)$
- Si trascurano le curvature spirali k_4 e k_5 ;
- Si trascurano le deformazioni trasversali a taglio γ_4 e γ_5 .

2.2 Modello MGCLPT

Per l'ipotesi a) le deformazioni nel piano medio si riducono alle (1) di von Karman, mentre le espressioni delle curvature, considerando anche l'ipotesi b), diventano:

$$k_1 = -w_{xx} + w_x u_{xx} + w_y v_{xx} + u_x w_{xx} + \frac{1}{2}u_y w_{xy} + \frac{1}{2}v_x w_{xy} + \frac{1}{2}w_{xx} w_y^2 + \frac{1}{2}w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{xx} \quad (3a)$$

$$k_2 = -w_{yy} + w_x u_{yy} + w_y v_{yy} + v_y w_{yy} + \frac{1}{2}u_y w_{xy} + \frac{1}{2}v_x w_{xy} + \frac{1}{2}w_{yy} w_x^2 + \frac{1}{2}w_y w_x w_{xy} + w_y^2 w_{yy} \quad (3b)$$

$$k_6 = -w_{xy} + w_x u_{xy} + w_y v_{xy} + v_y w_{xy} + \frac{1}{2}u_y w_{xx} + \frac{1}{2}v_x w_{xx} + \frac{1}{2}w_{xy} w_x^2 + \frac{1}{2}w_x w_y w_{xx} + w_y^2 w_{xy} \\ - w_{xy} + w_x u_{xy} + w_y v_{xy} + u_x w_{xy} + \frac{1}{2}u_y w_{yy} + \frac{1}{2}v_x w_{yy} + \frac{1}{2}w_{xy} w_y^2 + \frac{1}{2}w_x w_y w_{yy} + w_x^2 w_{xy} \quad (3c)$$

Per l'ipotesi c), il campo di deformazione ed i conseguenti sforzi generalizzati si riducono a:

$$\varepsilon_{11} = e_1 + zk_1, \quad \varepsilon_{22} = e_2 + zk_2, \quad \varepsilon_{12} = \gamma_6 + zk_6, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (4)$$

$$(N_1, N_2, N_6) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) dz, \quad (M_1, M_2, M_6) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) dz \quad (5)$$

con le deformazioni generalizzate espresse dalle (1) e (3).

Applicando il principio di Hamilton, si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio dinamico, rispettivamente in direzione x , y , z :

$$N_{1x} + N_{6y} + A = I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_x \quad (6a)$$

$$N_{6x} + N_{2y} + B = I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{w}_y \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} & \left(N_1 w_x + N_6 w_y + M_{1x} + M_{6y} \right)_x + C + \\ & \left(N_2 w_y + N_6 w_x + M_{6x} + M_{2y} \right)_y + D = I_0 \ddot{w} + I_2 \ddot{w}_{xx} + I_2 \ddot{w}_{yy} \end{aligned} \quad (6c)$$

dove le quantità I sono i termini inerziali e le quantità A , B , C e D sono riportate in Appendice. (Le associate condizioni al contorno per brevità non si riportano [5]). Rispetto alla piastra classica alla von Karman (CLPT), notiamo che le equazioni (6a) e (6b) presentano dei termini aggiuntivi rappresentati dalle quantità A e B . Tali termini dipendono dal fatto che l'equilibrio alle traslazioni nel piano medio è imposto nella configurazione deformata della piastra, contrariamente al modello di von Karman. Quindi le quantità A e B rappresentano le componenti *inplane* dei tagli, che nello sviluppo del modello risultano automaticamente espressi in funzione dei momenti. L'equazione di equilibrio trasversale (6c) presenta invece – sempre rispetto a CLPT – dei termini aggiuntivi rappresentati dalle quantità C e D . In questo caso, anche l'analoga equazione di CLPT deriva da un equilibrio nella configurazione deformata, ma la descrizione della deformazione in MGCLPT è più ricca, e ciò produce dei termini aggiuntivi. Coerentemente con il campo di deformazione (4) il legame costitutivo dell'intero laminato si riduce a:

$$\begin{aligned} N_i &= A_{ij} e_j + B_{ij} k_j \\ M_i &= B_{ij} e_j + D_{ij} k_j \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{i,j}^{(k)} \{1, z, z^2\} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{i,j}^{(k)} \{1, z, z^2\} dz \quad \text{ed } i, j = 1, 2, 6 \quad (8)$$

La quantità A_{ij}, D_{ij}, B_{ij} sono, rispettivamente, le *rigidezze estensionali, flessionali* e di *accoppiamento flesso-estensionale* dell'intero laminato; $\overline{Q}_{i,j}^{(k)}$ sono le rigidezze delle singole lamine, considerate di tipo fibro-rinforzato unidirezionale [1].

Inserendo le deformazioni (1) e (3) nel legame costitutivo (7), inserendo quest'ultimo nelle equazioni di equilibrio dinamico (6), e troncando le equazioni all'ordine cubico, otteniamo le tre equazioni di governo in termini di spostamento, rispettivamente in direzione x , y , e z :

$$L_{ij}^{1A} A_{ij} + L_{ij}^{1B} B_{ij} + L_{ij}^{1D} D_{ij} = I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_x \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (9a)$$

$$L_{ij}^{2A} A_{ij} + L_{ij}^{2B} B_{ij} + L_{ij}^{2D} D_{ij} = I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{w}_y \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (9b)$$

$$L_{ij}^{3A} A_{ij} + L_{ij}^{3B} B_{ij} + L_{ij}^{3D} D_{ij} = I_0 \ddot{w} + I_2 \ddot{w}_{xx} + I_2 \ddot{w}_{yy} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (9c)$$

dove i termini $L_{ij}^{kA}, L_{ij}^{kB}, L_{ij}^{kD}$ ($k = 1, 2, 3$) contengono le funzioni incognite u , v , w , e mostrano accoppiamenti elastici e geometrici tra i tre moti u , v , w della piastra. (Per brevità, tali termini non si riportano, come non si riportano le condizioni al contorno esplicitate in termini di spostamento [5]).

2.3 Semplificazione ICLPT e formulazione alla Airy

Il modello MGCLPT – pur essendo notevolmente ridotto rispetto alla teoria generale – non può sfruttare i vantaggi di calcolo caratteristici dei modelli alla von Karman, che risiedono nell'assenza di accoppiamenti geometrici tra i moti nelle equazioni *inplane*. Il modello MGCLPT è stato allora semplificato trascurando i contributi legati agli spostamenti u e v nella legge di trasformazione dei riferimenti, pervenendo così al modello semplificato ICLPT. In tale modello le curvature (3) si riducono a:

$$k_1 = -w_{xx} + \frac{1}{2}w_{xx}w_y^2 + \frac{1}{2}w_xw_yw_{xy} + w_x^2w_{xx} \quad (10a)$$

$$k_2 = -w_{yy} + \frac{1}{2}w_{yy}w_x^2 + \frac{1}{2}w_yw_xw_{xy} + w_y^2w_{yy} \quad (10b)$$

$$k_6 = -w_{xy} + \frac{1}{2}w_{xy}w_x^2 + \frac{1}{2}w_xw_yw_{xx} + w_y^2w_{xy} - w_{xy} + \frac{1}{2}w_{xy}w_y^2 + \frac{1}{2}w_xw_yw_{yy} + w_x^2w_{xy} \quad (10c)$$

e le equazioni di equilibrio (6) diventano:

$$N_{1x} + N_{6y} = I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_x \quad (11a)$$

$$N_{6x} + N_{2y} = I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_y \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & \left(N_1w_x + N_6w_y + M_{1x} + M_{6y} \right)_x + C^* + \\ & \left(N_2w_y + N_6w_x + M_{6x} + M_{2y} \right)_y + D^* = I_0\ddot{w} + I_2\ddot{w}_{xx} + I_2\ddot{w}_{yy} \end{aligned} \quad (11c)$$

(le quantità C^* e D^* sono riportate in Appendice). Semplificazioni analoghe si hanno per le associate condizioni al contorno. Notiamo che le prime due equazioni (11a) e (11b) coincidono con le corrispondenti di CLPT; mentre la terza (11c) perde, rispetto alla (6c), i termini con gli spostamenti u e v , conservando comunque dei termini aggiuntivi rispetto alla corrispondente equazione alla von Karman. Tale semplificazione operativa rende il modello ICLPT suscettibile di una formulazione alla Airy, come di seguito sviluppata.

Assumendo che la piastra abbia densità costante ($I_1 = 0$), trascurando i termini di inerzia *inplane* (coerentemente con l'ipotesi a) [2], e trascurando le inerzie rotazionali, le (11a) e (11b) possono essere soddisfatte esattamente introducendo la funzione di sforzo di Airy $\Phi(x, y, t)$, tale che:

$$N_1 = \Phi_{yy}, \quad N_2 = \Phi_{xx}, \quad N_6 = -\Phi_{xy} \quad (12)$$

Il legame costitutivo (7), effettuando un'inversione parziale di matrici, può porsi nella conveniente forma:

$$\begin{aligned} e_i &= A_{ij}^* N_j + B_{ij}^* k_j \\ M_i &= C_{ij}^* N_j + D_{ij}^* k_j \end{aligned} \quad (13)$$

con

$$A_{ij}^* = A_{ij}^{-1}, \quad B_{ij}^* = -A_{ik}^{-1} B_{kj}, \quad C_{ij}^* = B_{ik} A_{kj}^{-1}, \quad D_{ij}^* = D_{ij} - B_{ih} A_{hk}^{-1} B_{kj} \quad \text{ed} \quad i, j, h, k = 1, 2, 6$$

Utilizzando le (12), (13) e (10), e trascurando sempre le inerzie, l'equazione di equilibrio trasversale (11c) diventa:

$$w_{xx}\Phi_{yy} - 2w_{xy}\Phi_{xy} + w_{yy}\Phi_{xx} + L_{ij}^{wB}B_{ij}^* + L_{ij}^{wD} \cdot D_{ij}^* = I_0\ddot{w} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (14)$$

dove i termini L_{ij}^{wB} , L_{ij}^{wD} contengono le funzioni incognite w e Φ e per brevità non si riportano [5]. Alla (14) deve essere associata un'equazione di compatibilità espressa in termini di funzioni w e Φ , che può ricavarsi eliminando u e v nella (1), ed utilizzando le (12), (13) e (10):

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 + \Phi_{yyyy}A_{11}^* + 2\Phi_{xxyy}A_{12}^* - 2\Phi_{xyyy}A_{16}^* + \Phi_{xxxx}A_{22}^* - 2\Phi_{xxyy}A_{26}^* + \Phi_{xyyy}A_{66}^* + L_{ij}^{\Phi B}B_{ij}^* = 0 \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (15)$$

dove i termini $L_{ij}^{\Phi B}$ contengono la funzioni incognite w e Φ e per brevità non si riportano [5]. Le (14) e (15) rappresentano dunque le equazioni di governo per il modello ICLPT nelle funzioni incognite w e Φ . Notiamo che, per laminati in cui le rigidzze di accoppiamento flessio-estensionale B_{ij} sono nulle, l'equazione di compatibilità (15) coincide con l'analoga di von Karman.

3 DISCRETIZZAZIONE E SOLUZIONE

3.1 Premessa e condizioni dinamiche considerate

Il modello ICLPT viene prima discretizzato nel dominio dello spazio assumendo come funzioni di forma predefinite le autofunzioni del problema linearizzato, e poi risolto per via perturbativa. Le condizioni dinamiche considerate sono: (i) risonanza esterna primaria del modo fondamentale (1,1) in assenza di risonanze interne con altri modi; (ii) risonanza interna 3:1 tra il modo fondamentale (1,1) ed il modo (1,3), caso in cui l'eccitazione in risonanza primaria del modo a frequenza più elevata comporta una risposta significativa del modo fondamentale, che risulta auto parametricamente eccitato in risonanza subarmonica. Assumendo che non ci siano altre risonanze che coinvolgano ulteriori modi, gli sviluppi si particolarizzano per il caso bimodale (ii) (che contiene come caso degenerare anche il caso monomodale (i)).

3.2 Discretizzazione nel dominio dello spazio con la procedura di Galerkin

Considerando una piastra rettangolare semplicemente appoggiata di lati a e b , priva di sforzi *inplane* lungo i bordi, le condizioni al contorno possono essere scritte come segue:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = 0 \quad \text{ad } x = 0, a$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = 0 \quad \text{ad } y = 0, b \quad (16)$$

Per gli spostamenti trasversali w si assume la seguente forma, espressa come combinazione delle due autofunzioni simmetriche (1,1) e (1,3) del problema dinamico linearizzato [2]:

$$w = h W_1(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + h W_2(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \quad (17)$$

dove h è lo spessore ed i coefficienti $W_i(t)$ sono ampiezze di spostamento adimensionali, che esprimono il contributo del relativo modo di vibrare allo spostamento trasversale w . Per la funzione di sforzo di Airy si assume la seguente forma:

$$\Phi = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} R_{pq} \cos \frac{p \pi x}{a} \cos \frac{q \pi y}{b} \quad (18)$$

che soddisfa le condizioni al contorno (16). Nella (18), i coefficienti R_{ij} si possono ricavare in funzione degli spostamenti W_i inserendo le (17) e (18) nell'equazione di compatibilità (15), e confrontando i coefficienti dei termini trigonometrici (principio di identità dei polinomi). Il metodo di Galerkin impone:

$$\int_0^b \int_0^a (14) \times \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy = 0 \quad (19)$$

Per cui, sostituendo le (17) e (18) nell'equazione di equilibrio trasversale (14), ed eseguendo l'integrazione, si ottiene il seguente sistema di due equazioni differenziali ordinarie nel tempo con nonlinearità quadratiche e cubiche:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_1 + \mu \dot{W}_1 + \omega_1^2 W_1 + G_{111} W_1^2 + G_{122} W_2^2 + G_{112} W_1 W_2 \\ + G_{1111} W_1^3 + G_{1112} W_1^2 W_2 + G_{1122} W_1 W_2^2 = F_1 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_2 + \mu \dot{W}_2 + \omega_2^2 W_2 + G_{211} W_1^2 + G_{222} W_2^2 + G_{212} W_1 W_2 \\ + G_{2222} W_2^3 + G_{2112} W_1^2 W_2 + G_{2111} W_1^3 = F_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (20b)$$

Nelle (20) si sono introdotte le seguenti quantità adimensionali: coefficiente di smorzamento μ' ; coefficienti dei termini lineari ω_i (quadrato delle frequenze naturali), coefficienti dei termini quadratici G_{ijk} , coefficienti dei termini cubici G_{ijkl} , ampiezza F_i e frequenza Ω' del carico dinamico esterno, variabile temporale t' (si omettono gli apici dalle (20) in poi). Tali quantità sono riportate in Appendice, tranne le quantità ω_i , G_{ijk} , G_{ijkl} , che si omettono per brevità [5].

Il modello discreto di ICLPT è dunque rappresentato dalle equazioni differenziali alla Helmholtz-Duffing (20). Esso presenta la stessa struttura matematica del corrispondente modello discreto alla von Karman (CLPT), mentre le differenze sono contenute nei coefficienti dei termini cubici delle equazioni. Infatti i coefficienti G_{ijkl} delle (20) risultano esprimibili come:

$$G_{ijkl} = G_{ijkl}^{CLPT} + G_{ijkl}^M(s) \quad (21)$$

dove G_{ijkl}^{CLPT} sono gli analoghi coefficienti di CLPT mentre $G_{ijkl}^M(s)$ è un'aliquota aggiuntiva relativa solo a ICLPT, funzione del rapporto $s = h/a$ tra spessore e lato. La parte G_{ijkl}^{CLPT} è dovuta alle deformazioni *inplane* del piano medio, ovvero agli accoppiamenti geometrici tra il moto *inplane* ed il moto trasversale, quindi è funzione soltanto delle rigidezze A_{ij}^* e non delle rigidezze B_{ij}^* e D_{ij}^* . La parte $G_{ijkl}^M(s)$ è invece dovuta alla presenza di alcuni contributi nonlineari aggiuntivi presenti in ICLPT, ed è funzione anche delle rigidezze B_{ij}^* e D_{ij}^* .

Relativamente alle nonlinearità quadratiche, i coefficienti dei termini quadratici relativi a ICLPT sono gli stessi di CLPT, e sono collegati esclusivamente alle rigidezze B_{ij}^* . Si è visto che non tutte le rigidezze B_{ij}^* sono collegate a situazioni di non-ortogonalità (nella procedura di Galerkin) tali da produrre termini quadratici non nulli [5]. Quindi la presenza nel legame costitutivo della matrice $[B_{ij}^*]$ di accoppiamento flesso-estensionale (caso dei laminati generici o antisimmetrici) è una condizione necessaria ma non sufficiente per far nascere nonlinearità quadratiche (Tab. 2).

Schema di laminazione	Nonlinearità quadratiche	Nonlinearità cubiche
generico	SI	SI
simmetrico <i>cross-ply</i>	NO	SI
simmetrico <i>angle-ply</i>	NO	SI
antisimmetrico <i>cross-ply</i>	SI	SI
antisimmetrico <i>angle-ply</i>	NO	SI
isotropia	NO	SI
ortotropia	NO	SI

Tab. 2. Presenza delle nonlinearità quadratiche e cubiche nei vari tipi di laminati.

3.3 Soluzione perturbativa con il metodo delle scale multiple

Poiché i coefficienti dei termini quadratici del modello ICLPT coincidono con quelli di CLPT (cfr.§3.2), in prima analisi si considerano laminati con sole nonlinearità cubiche. Allora la (20) si contrae, ed assumendo che l'intensità della forzante esterna sia tale da indurre ampiezze di risposta sufficientemente piccole, essa risulta così espressa in funzione del piccolo parametro ε [4]:

$$\ddot{X}_1 + 2\varepsilon\mu \dot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + \varepsilon(G_{1111}X_1^3 + G_{1112}X_1^2X_2 + G_{1122}X_1X_2^2) = 2\varepsilon f_1 \cos\Omega t \quad (22a)$$

$$\ddot{X}_2 + 2\varepsilon\mu \dot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + \varepsilon(G_{2222}X_2^3 + G_{2112}X_1^2X_2 + G_{2111}X_1X_2^2) = 2\varepsilon f_2 \cos\Omega t \quad (22b)$$

dove:

$$W_i = \varepsilon^{1/2} X_i, \quad \mu = C/2\varepsilon, \quad 2\varepsilon f_i = F_i/\varepsilon^{1/2} \quad (23)$$

Utilizzando il metodo delle scale multiple, la soluzione delle (22) viene espressa in termini di differenti scale temporali nella forma:

$$X_i(t;\varepsilon) = X_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1) + \dots \quad (T_0 = t \text{ e } T_1 = \varepsilon t) \quad (24)$$

Le condizioni di risonanza interna $\omega_2 \approx 3\omega_1$ ed esterna $\omega_2 \approx \Omega$ vengono descritte introducendo i

seguenti parametri desintonizzanti σ_1 e σ_2 , tali che:

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \quad \Omega = \omega_2 + \varepsilon\sigma_2 \quad (25)$$

Svolgendo tutti i passaggi, la condizione di solvibilità fornisce il seguente *sistema di modulazione* per le ampiezze a_i e per le fasi β_i :

$$\omega_1(a'_1 - \mu a_1) - \frac{1}{8}G_{1112}a_1^2a_2 \sin \gamma_1 = 0 \quad (26a)$$

$$-a_1\omega_1\beta'_1 + \frac{3}{8}G_{1111}a_1^3 + \frac{1}{8}G_{1112}a_1^2a_2 \cos \gamma_1 + \frac{1}{4}G_{1122}a_1a_2^2 = 0 \quad (26b)$$

$$\omega_2(a'_2 + \mu a_2) + \frac{1}{8}G_{2111}a_1^3 \sin \gamma_1 = -f_2 \sin \gamma_2 \quad (26c)$$

$$-a_2\omega_2\beta'_2 + \frac{1}{8}G_{2111}a_1^3 \cos \gamma_1 + \frac{1}{4}G_{2112}a_1^2a_2 + \frac{3}{8}G_{2222}a_2^3 = f_2 \cos \gamma_2 \quad (26d)$$

dove, per rendere il sistema autonomo, si è posto $\gamma_1 = 3\beta_1 - \beta_2 - \sigma_1 T_1$ e $\gamma_2 = \beta_2 - \sigma_2 T_1$.

Le soluzioni stazionarie delle (26) sono punti soluzione del sistema algebrico ottenuto dalle (26) annullando tutte le derivate. Tali punti sono tracciabili, al variare dei parametri esterni frequenza ed intensità della forzante, utilizzando tecniche di continuazione. Note le soluzioni stazionarie del sistema (26), i moti periodici della piastra in regime flessionale sono descritti da:

$$\frac{w}{h} = W_1 + W_2 = \sqrt{\varepsilon}a_1 \cos\left\{\frac{1}{3}(\Omega t + \beta_2 - \gamma_2)\right\} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \sqrt{\varepsilon}a_2 \cos(\Omega t + \gamma_2) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b} \quad (27)$$

La stabilità di tali moti può essere esaminata controllando gli autovalori della matrice Jacobiana, ottenuti analizzando il comportamento del sistema (26) nell'intorno infinitesimo delle soluzioni stazionarie.

4 RISULTATI NUMERICI

La risposta dinamica del modello ICLPT è stata confrontata con quella di CLPT. Come esempio per il caso monomodale in risonanza primaria esterna sul modo fondamentale ($\Omega \approx \omega_1$), utilizziamo una piastra quadrata antisimmetrica *angle-ply* (45°) con 18 strati in boro-epossidica. Dalle curve ampiezza-frequenza dei due modelli (Fig.2a), notiamo che il coefficiente nonlineare di ICLPT induce una nonlinearity meno *hardening* rispetto a CLPT; poiché come è noto il picco di ampiezza è indipendente dal coefficiente di nonlinearity, la *saddle-node bifurcation* si verifica per ICLPT alla stessa ampiezza di CLPT ma ad una inferiore frequenza della forzante. La Fig.2b mostra, per i due modelli, le relative evoluzioni temporali in corrispondenza del punto di picco di ICLPT in Fig. 2a; può notarsi la differenza di ampiezza e lo sfasamento. La Fig. 2c confronta le curve ampiezza-forza in corrispondenza delle frequenze di picco della Fig. 2a; lo scarto di forza in corrispondenza del primo punto di salto è di circa 30%. Come esempio per il caso di interazione bimodale dovuta alla risonanza interna 3:1, utilizziamo una piastra rettangolare antisimmetrica *angle-ply* (60°) con due strati in grafite-epossidica. La Fig.2d mostra le differenze tra i due modelli in termini di ampiezza di risposta e di estensione delle zone stabili. Notiamo

anche, dalle curve complete delle Figg. 2e-f, che CLPT presenta due rami di soluzione distinti, mentre ICLPT mostra rami di soluzione unici che evolvono in un *range* di frequenza continuo. Utilizzando il modello ICLPT si sono poi compiute alcune indagini fenomenologiche al variare dei parametri interni della piastra. Le Figg. 2g-h mostrano ad esempio le risposte in risonanza primaria al variare del materiale, per un laminato di 18 strati. Notiamo che nel caso di schema antisimmetrico *angle-ply* (g) la nonlinearità ha effetti notevolmente diversi sui vari materiali considerati, mentre nel caso antisimmetrico *cross-ply* (h) l'effetto della nonlinearità è simile per tutti i materiali considerati ma le differenze nei valori di picco sono più elevate.

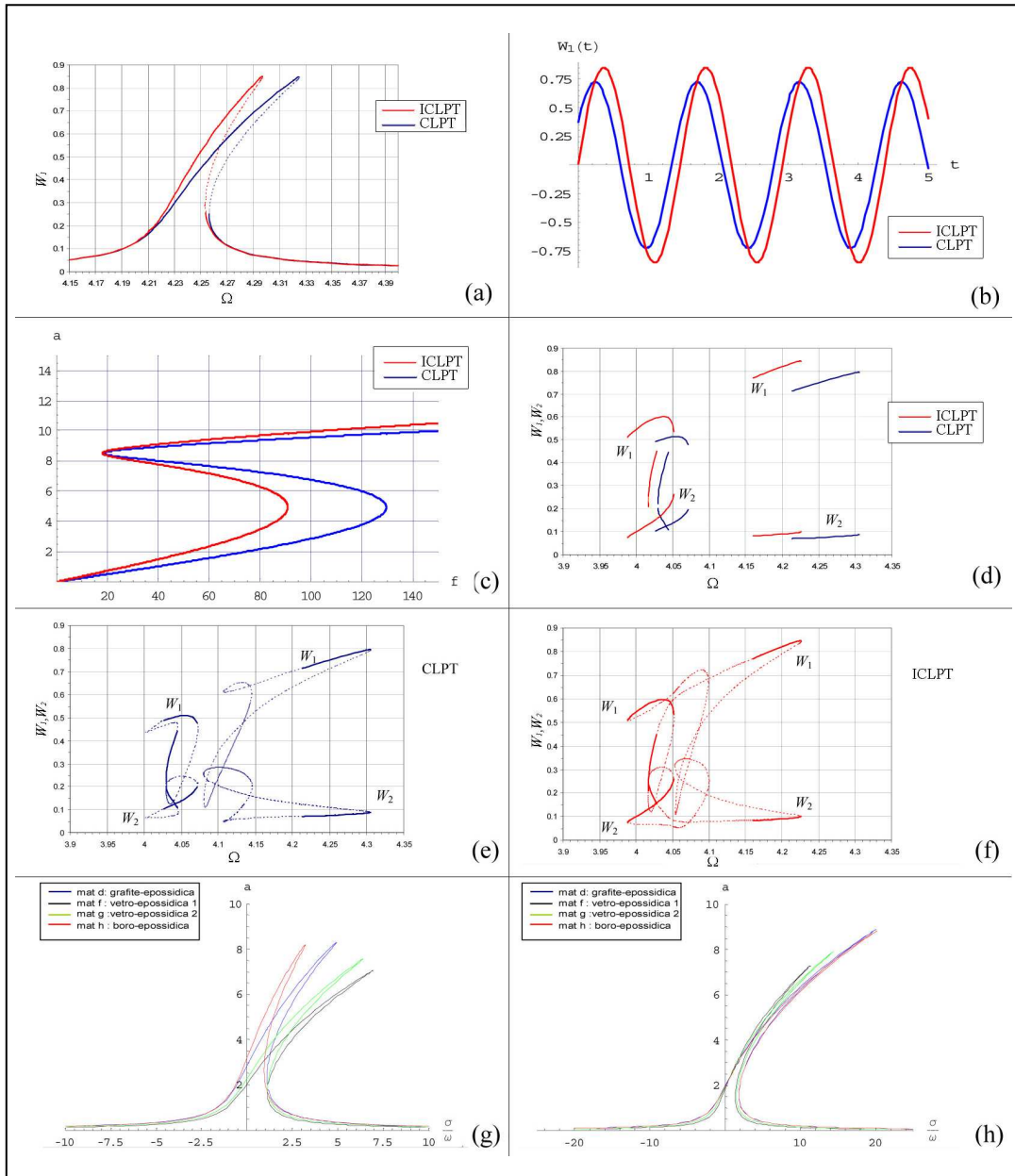


Fig. 2. (a): $s = 0.1$, $r = 1$, $f = 18$; (b): $s = 0.1$, $r = 1$, $f = 18$, $\Omega = 4.297$; (c): $s = 0.1$, $r = 1$, Ω (CLPT) = 4.325, Ω (ICLPT) = 4.297; (d)(e)(f): $s = 0.1$, $r = 0.445$, $f = 18$; (g)(h): $s = 0.04$, $r = 0.5$, $f = 10$

5 CONCLUSIONI

Partendo dalla teoria generale presentata in [3], è stato sviluppato un modello a curvature nonlineari MGCLPT, che è stato ulteriormente semplificato producendo il modello ICLPT. Quest'ultimo è stato risolto con MMS e confrontato con il modello CLPT (von Karman). Per il caso di risposte monomodali in risonanza esterna, le curve ampiezza-frequenza del modello ICLPT mostrano una nonlinearity meno *hardening* rispetto al modello CLPT (von Karman). Nel caso di risposte bimodali in condizione di risonanza interna 3:1, le suddette curve mostrano sfalsamenti di posizione ed estensione dei tratti di soluzione stabile. Utilizzando il modello ICLPT, si sono poi effettuate alcune indagini fenomenologiche.

Bibliografia

- [1] Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press (2004).
- [2] Nayfeh, Ali H. and Pai, P. Frank, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Wiley (2004).
- [3] Pai, P. Frank and Nayfeh, Ali H., "A nonlinear composite plate theory", *Nonlinear Dynamics*, 2, 445-477 (1991).
- [4] Abe, A., Kobayashi Y. and Yamada, G., "Two-mode response of simply supported, rectangular laminated plates", *International Journal of Non-linear Mechanics*, 33, (4), 675-690 (1998).
- [5] Saetta, E., *La piastra in compositi laminati: modellazione e dinamica nonlineare in condizioni di risonanza*, Tesi di Dottorato, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Sapienza Università di Roma (2009).

APPENDICE

Significato delle sigle in Tab.1:

CLPT = classical laminated plate theory; FSDT = first-order shear deformation laminated plate theory; TSDT = third-order shear deformation laminated plate theory; G = general; M = modified; I = improved.

Quantità nelle equazioni (6):

$$C = \left(-\frac{M_{2y}w_xw_y}{2} - \frac{M_{6x}w_xw_y}{2} - \frac{M_{1x}w_y^2}{2} - \frac{M_{6y}w_y^2}{2} - M_{1x}w_x^2 - M_{6y}w_x^2 \right. \\ \left. + M_{1x}u_x - M_{6y}u_x - \frac{M_{2y}u_y}{2} - \frac{M_{6x}u_y}{2} - \frac{M_{2y}v_x}{2} - \frac{M_{6x}v_x}{2} \right)_x \\ A = (M_{1x}w_x - M_{6y}w_x)_x + (M_{2y}w_x - M_{6x}w_x)_y \\ B = (M_{1x}w_y - M_{6y}w_y)_x + (M_{2y}w_y - M_{6x}w_y)_y \\ D = \left(-\frac{M_{1x}w_xw_y}{2} - \frac{M_{6y}w_xw_y}{2} - \frac{M_{2y}w_x^2}{2} - \frac{M_{6x}w_x^2}{2} - M_{2y}w_y^2 - M_{6x}w_y^2 \right. \\ \left. - M_{2y}v_y - M_{6x}v_y - \frac{M_{1x}u_y}{2} - \frac{M_{6y}u_y}{2} - \frac{M_{1x}v_x}{2} - \frac{M_{6y}v_x}{2} \right)_y$$

Quantità nelle equazioni (11):

$$C^* = \left(-\frac{M_{2y}w_xw_y}{2} - \frac{M_{6x}w_xw_y}{2} - \frac{M_{1x}w_y^2}{2} - \frac{M_{6y}w_y^2}{2} - M_{1x}w_x^2 - M_{6y}w_x^2 \right)_x \\ D^* = \left(-\frac{M_{1x}w_xw_y}{2} - \frac{M_{6y}w_xw_y}{2} - \frac{M_{2y}w_x^2}{2} - \frac{M_{6x}w_x^2}{2} - M_{2y}w_y^2 - M_{6x}w_y^2 \right)_y$$

Quantità nelle equazioni (20):

$$\mu' = \frac{\mu}{I_0} \sqrt{\frac{I_0 a^4}{E_L h^3}}, \quad t' = \sqrt{\frac{E_L h^3}{I_0 a^4}}, \quad \Omega' = \Omega \sqrt{\frac{I_0 a^4}{E_L h^3}}, \quad F_i = \frac{4q_0 r a^2}{E_L h^4} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} dx dy, \quad r = \frac{a}{b}, \quad s = \frac{h}{a}$$