

# La formulazione simmetrica alla Galerkin del BEM in elastoplasticità

Teotista Panzeca<sup>1</sup>, Filippo Cucco<sup>2</sup>, Eugenia Parlavecchio<sup>1</sup>, Liborio Zito<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Disag, Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italy

E-mail: [tpanzeca@tiscali.it](mailto:tpanzeca@tiscali.it), [parlavecchio@unipa.it](mailto:parlavecchio@unipa.it), [zitoliborio@tiscali.it](mailto:zitoliborio@tiscali.it)

<sup>2</sup>Università Kore di Enna, Cittadella universitaria, 94100 Enna, Italy

E-mail: [filippo.cucco@unikore.it](mailto:filippo.cucco@unikore.it)

*Parole chiave:* SGBEM, approccio multidomain, elastoplasticità, integrali di dominio.

**SOMMARIO.** Nel presente lavoro la formulazione Simmetrica del Metodo degli Elementi di Contorno (SBEM) è stata applicata alle analisi di materiali a comportamento elasto-plastico. La strategia che si presenta prevede un'analisi di tipo *multidomain* che consiste nella suddivisione della zona plasticamente attiva in elementi-bem (e-bem) ed impiega:

- l'approccio agli spostamenti per la determinazione del predittore elastico,
- un approccio *path-following* per la determinazione delle grandezze anelastiche da associare alle singole celle,
- una metodologia che permette di trasformare gli integrali di dominio, associati alle grandezze anelastiche della cella, in integrali definiti sugli elementi di contorno.

L'analisi elastica condotta attraverso l'approccio agli spostamenti [1] presenta il vantaggio di pervenire ad un sistema risolvibile con sole grandezze cinematiche nodali di interfaccia e risulta computazionalmente più vantaggiosa rispetto ad altre formulazioni sia nell'ambito del BEM che del FEM, poiché si perviene a sistemi risolvibili di piccole dimensioni.

La risposta elastoplastica di fine passo, nell'ipotesi di plasticità associata e di materiali caratterizzati da comportamento elastico-perfettamente plastico, utilizza una strategia di tipo *strain driven*. Questa valuta il predittore elastico via SBEM mediante l'approccio agli spostamenti, in funzione delle condizioni iniziali e dell'incremento di carico. Qualora il predittore violi la condizione di ammissibilità plastica, il rientro viene raggiunto attraverso l'impiego di un appropriato algoritmo [2]. Quest'ultimo si determina ricorrendo alla teoria dei percorsi estremali [3, 4], in alternativa ad altre strategie impiegate da altri ricercatori [5].

Le deformazioni plastiche  $\bar{\epsilon}^p$ , determinate mediante la strategia precedentemente introdotta vengono assimilate a distorsioni imposte costanti nelle celle in un processo iterativo. Il loro effetto comporta la presenza di integrali di dominio aventi nuclei debolmente e fortemente singolari.

Nel presente lavoro si mostra una formulazione nella quale tali integrali di dominio vengono opportunamente trattati. Vengono considerati come Valori Principali di Cauchy il cui termine libero associato è il *Bui free term* [6], quindi regolarizzati al fine di isolare la singolarità forte. Infine si applica il *Radial Integral Method (RIM)* [7, 8, 9] allo scopo di trasformare gli integrali di dominio in integrali da effettuarsi sul contorno della cella. Questa strategia risulta necessaria nel SBEM in quanto tale metodo impiega le Identità di Somigliana (I.S.) degli spostamenti e delle trazioni, valutate sul contorno, su cui è operata una pesatura attraverso appropriate funzioni di forma.

## 1 ANALISI DI TIPO MULTIDOMAIN MEDIANTE L'APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

Per ciascun e-bem si determina un'equazione elastica che lega le quantità associate al contorno di interfaccia mediante un'analisi di tipo *multidomain* nell'ambito dell'SBEM. Questa strategia prevede lo studio di ciascun e-bem considerato immerso in un dominio illimitato avente le stesse caratteristiche fisiche e lo stesso spessore del solido esaminato. In tale ipotesi va operata una distinzione del contorno in  $\Gamma$  di  $\Omega$  e  $\Gamma^+$  del dominio complementare  $\Omega_\infty \setminus \Omega$ . Come conseguenza le quantità associate al contorno assumono un significato diverso: le forze devono essere interpretate come forze stratificate, mentre gli spostamenti devono essere pensati come spostamenti relativi tra le due frontiere. Si impongono, quindi, le condizioni classiche di Dirichlet e Neumann negli e-bem che ricadono sul contorno del corpo, cioè:

$$\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 \text{ su } \Gamma_1, \quad \mathbf{t}_2 = \bar{\mathbf{f}}_2 \text{ su } \Gamma_2 \quad (1a,b)$$

dove sono valide le seguenti I.S.:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_1[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{u}_1[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{u}_1[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] & \text{su } \Gamma_1 \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{t}_2[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{t}_2[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{t}_2[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] & \text{su } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2a-b)$$

Inoltre sul contorno  $\Gamma_0$  di ciascun e-bem devono essere definite le I.S. degli spostamenti  $\mathbf{u}_0$  e delle trazioni  $\mathbf{t}_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \mathbf{u}_0[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{u}_0[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{u}_0[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] & \text{su } \Gamma_0 \\ \mathbf{t}_0 &= \mathbf{t}_0[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{t}_0[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{t}_0[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] & \text{su } \Gamma_0 \end{aligned} \quad (2c-d)$$

dove  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$  è il vettore delle deformazioni plastiche la cui strategia di valutazione sarà definita nella prossima sezione. A soluzione ottenuta, le trazioni  $\mathbf{t}_0$  si identificano con le forze  $\mathbf{f}_0$ . Pertanto, operando opportune modifiche nelle (2a-c) e lasciando inalterata la (2d), si ottiene un sistema di equazioni integrali dove le (2a-c) possono essere interpretate come la risposta di ciascun e-bem valutata sui contorni  $\Gamma_1^+$ ,  $\Gamma_2^+$ ,  $\Gamma_0^+$ , rispettivamente, mentre la (2d) mantiene lo stesso significato di trazione valutata sull'effettivo contorno d'interfaccia  $\Gamma_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^+[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{u}_1^+[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{u}_1^+[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] &= \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_1^+ \\ \mathbf{t}_2^+[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{t}_2^+[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{t}_2^+[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] &= \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_2^+ \\ \mathbf{u}_0^+[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{u}_0^+[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{u}_0^+[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] &= \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_0^+ \\ \mathbf{t}_0 &= \mathbf{t}_0[\mathbf{f}_1, -\mathbf{u}_2, \mathbf{f}_0, -\mathbf{u}_0] + \mathbf{t}_0[\bar{\mathbf{f}}_2, -\bar{\mathbf{u}}_1] + \mathbf{t}_0[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] & \text{su } \Gamma_0 \end{aligned} \quad (3a-d)$$

Si introduca la discretizzazione del contorno in elementi di contorno e si operi la seguente modellazione delle variabili:

$$\mathbf{f}_1 = \boldsymbol{\Psi}_f \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\Psi}_u \mathbf{U}_2, \quad \mathbf{f}_0 = \boldsymbol{\Psi}_f \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\Psi}_u \mathbf{U}_0 \quad (4a-d)$$

dove le reazioni ( $\mathbf{F}_1$  su  $\Gamma_1$  e  $\mathbf{F}_0$  su  $\Gamma_0$ ) e gli spostamenti ( $\mathbf{U}_2$  su  $\Gamma_2$  e  $\mathbf{U}_0$  su  $\Gamma_0$ ) sono valutati sui nodi degli elementi di contorno. Si esegua quindi la pesatura di tutti i coefficienti delle (3a-d) ottenendo il seguente sistema a blocchi:

$$\begin{array}{c|ccc|c|c} \mathbf{W}_1^+ = \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u1,u1} & \mathbf{A}_{u1,f2} & \mathbf{A}_{u1,u0} & \mathbf{A}_{u1,f0} & \mathbf{F}_1 & \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \mathbf{P}_2^+ = \mathbf{0} & \mathbf{A}_{f2,u1} & \mathbf{A}_{f2,f2} & \mathbf{A}_{f2,u0} & \mathbf{A}_{f2,f0} & -\mathbf{U}_2 & \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \mathbf{W}_0^+ = \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u0,u1} & \mathbf{A}_{u0,f2} & \mathbf{A}_{u0,u0} & \mathbf{A}_{u0,f0} & \mathbf{F}_0 & \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hline \mathbf{P}_0 & \mathbf{A}_{f0,u1} & \mathbf{A}_{f0,f2} & \mathbf{A}_{f0,u0} & \mathbf{A}_{f0,f0} & -\mathbf{U}_0 & \hat{\mathbf{L}}_0 \end{array} + \quad (5)$$

Nella (5) le condizioni  $\mathbf{W}_1^+ = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{P}_2^+ = \mathbf{0}$  devono essere considerate come le classiche condizioni di Dirichlet e Neumann scritte sugli elementi di contorno  $\Gamma^+$  del dominio complementare, in termini di quantità generalizzate (o pesate). Le altre due espressioni sono relative alle quantità associate al contorno di interfaccia: la condizione  $\mathbf{W}_0^+ = \mathbf{0}$  rappresenta gli spostamenti generalizzati, nulli sul contorno  $\Gamma_0^+$ , mentre il termine  $\mathbf{P}_0$  contiene i valori delle trazioni generalizzate definite sugli elementi di contorno  $\Gamma_0$ . Per tutti i coefficienti presenti nella (5) si rimanda a Panzeca et al. [1, 7].

La (5) può essere riscritta, con ovvio significato di simboli, nella seguente forma compatta:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{A}_0(-\mathbf{U}_0) + \hat{\mathbf{L}} \\ \mathbf{P}_0 &= \tilde{\mathbf{A}}_0\mathbf{X} + \mathbf{A}_{00}(-\mathbf{U}_0) + \hat{\mathbf{L}}_0 \end{aligned} \quad (6a,b)$$

dove il vettore  $\mathbf{X}$  contiene  $\mathbf{F}_1$ ,  $(-\mathbf{U}_2)$  e  $\mathbf{F}_0$ , mentre  $(-\mathbf{U}_0)$  contiene gli spostamenti dei nodi della zona di interfaccia, cambiati di segno.

Mediante una opportuna condensazione di variabili, attraverso la sostituzione del vettore  $\mathbf{X}$  ricavato dalla (6a) nella (6b), si ottiene:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_{00}\mathbf{U}_0 + \hat{\mathbf{P}}_0 \quad (7)$$

dove sono state assunte le seguenti posizioni:

$$\mathbf{D}_{00} = \tilde{\mathbf{A}}_0\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_{00}, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = \hat{\mathbf{L}}_0 - \tilde{\mathbf{A}}_0\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{L}} \quad (8a,b)$$

La (7), valida per ciascun e-bem, è chiamata equazione caratteristica. Essa relaziona trazioni generalizzate  $\mathbf{P}_0$  a spostamenti  $\mathbf{U}_0$  dei nodi del contorno di interfaccia e al termine di carico  $\hat{\mathbf{P}}_0$ , essendo quest'ultimo un vettore di trazioni generalizzate, ottenuto come effetto delle azioni esterne. Inoltre  $\mathbf{D}_{00}$  è la matrice di rigidezza associata al e-bem generico. Essa è formalmente identica a quella scritta nell'ambito del metodo degli elementi finiti, e relaziona grandezze riferite esclusivamente alla zona di interfaccia.

Si impongono, all'interfaccia tra elementi contigui, le condizioni di regolarità per gli spostamenti nodali e per le trazioni generalizzate, e si ottiene la risposta elastica in termini di  $\mathbf{U}_0$

attraverso il seguente sistema risolvibile:

$$\mathbf{K}_{00} \mathbf{U}_0 + \hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{0} \quad (9)$$

Le restanti quantità nodali, forze reattive  $\mathbf{F}_1$  su  $\Gamma_1$ , spostamenti  $\mathbf{U}_2$  su  $\Gamma_2$  e le forze  $\mathbf{F}_0$  su  $\Gamma_0$ , tutte variabili contenute nel vettore  $\mathbf{X}$ , possono essere ottenute dalla (6a), scritta per ciascun e-bem.

E' possibile adesso valutare il predittore elastico  $\boldsymbol{\sigma}^*$  nei punti di Gauss di ciascun e-bem mediante la seguente I.S. delle tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{F}_1, -\mathbf{U}_2, \mathbf{F}_0, -\mathbf{U}_0] + \boldsymbol{\sigma}[\bar{\mathbf{F}}_1, -\bar{\mathbf{U}}_1] + \boldsymbol{\sigma}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \quad (10)$$

dove il vettore delle deformazioni plastiche  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , imposto costante all'interno di ciascun e-bem, sarà definito nella seguente sezione.

## 2 ALGORITMO DI RIENTRO

La soluzione elastoplastica è ottenuta mediante una strategia di tipo *strain driven* che prevede:

- la valutazione del *predictor* utilizzando l'approccio agli spostamenti del SBEM, precedentemente mostrato;
- la valutazione del *corrector* mediante un algoritmo di rientro.

Poiché la risposta elastoplastica è *path-dependent*, risulta necessaria una discretizzazione dello spazio e del tempo. Si parta dalla condizione iniziale nota  $[\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p]$ , che rappresenta la risposta all'istante  $n$  in termini di tensione, deformazione totale e deformazione plastica e si valuti la risposta incognita in  $[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p]$  relativa all'istante  $t_{n+1}$ . L'integrazione di  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  nell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$ , conduce alla seguente relazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \quad (11)$$

da cui, integrando per parti e assumendo la condizione  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p [t_n] = 0$ , segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \gamma_{n+1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (12)$$

Si assuma poi che la storia dei carichi sia definita da un percorso estremale, sulla base della teoria proposta da Ponter e Martin [3]. L'approccio prevede l'integrazione esatta dell'equazione costitutiva  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$  lungo un particolare percorso di tensione che massimizza il lavoro complementare o lungo un particolare percorso di deformazione che minimizza il lavoro di deformazione. Quindi i percorsi estremali si configurano come percorsi elastici che connettono il punto di partenza  $\boldsymbol{\sigma}_n$  con quello finale  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , nello spazio delle tensioni, assumendo che il processo plastico abbia luogo solo nel punto finale. Pertanto la (12) diventa:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \gamma_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \quad (13)$$

e quindi la risposta è *path-independent*.

Il predittore elastico  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$  è funzione delle condizioni iniziali  $\boldsymbol{\sigma}_n$  e dell'incremento di carico, cioè:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{E} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}[\Delta \mathbf{u}] \quad (14)$$

Se  $F[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*] > 0$ , si ricorre a tecniche di *return mapping*. Nel presente approccio l'algoritmo di rientro è ottenuto risolvendo il sistema di equazioni non lineari che ha come incognite le tre componenti di tensione  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e lo scorrimento plastico  $\gamma_{n+1}$  [2]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* + \gamma_{n+1} \mathbf{E} \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = \mathbf{0} \\ F[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] = 0 \end{cases} \quad (15)$$

In particolare, nel caso di solido continuo 2D e nell'ipotesi di stato piano di deformazione, si utilizza il modello elastico-perfettamente plastico di von Mises:

$$F[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \sigma_y^2 \quad (16)$$

Segue che la (15) diventa:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* + \gamma_{n+1} \mathbf{E} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \sigma_y^2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

La soluzione approssimata di questo problema non lineare è ottenibile mediante il metodo di Newton-Raphson, cioè

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{j+1} \\ \gamma_{n+1}^{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j \\ \gamma_{n+1}^j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{I} + \gamma_{n+1}^j \mathbf{E} \mathbf{M} & \mathbf{E} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j \\ \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j & 0 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* + \gamma_{n+1}^j \mathbf{E} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j \\ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j)^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j + \sigma_y^2 \end{vmatrix} \quad (18)$$

che viene riscritta nella seguente forma compatta:

$$\mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{x}^j - \mathbf{J}(\mathbf{x}^j)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^j) \quad (19)$$

Nell'ultima equazione, la matrice degli Jacobiani  $\mathbf{J}$  contiene le derivate delle funzioni definite nella (17),  $\mathbf{x}^{j+1}$  è il vettore delle incognite,  $\mathbf{x}^j$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^j)$  sono i vettori noti valutati nel  $j$ -esimo passo. Il vettore soluzione permette di valutare le deformazioni plastiche  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  date dalla (13). La loro presenza nelle (3a-d) comporta integrali di dominio con nuclei singolari per i quali si richiede

una opportuna trattazione.

### 3 ASPETTI COMPUTAZIONALI NEL METODO DELLE EQUAZIONI INTEGRALI

Nell'ambito dell'analisi elastoplastica affrontata mediante il SBEM le maggiori difficoltà operative riguardano la rimozione delle singolarità forti presenti nei nuclei degli integrali di dominio, risultanti dall'applicazione dell'operatore differenziale al campo degli spostamenti [7].

Punto di partenza del problema elastico è l'I.S. degli spostamenti. In assenza di forze di massa, quest'ultima assume la seguente forma:

$$\mathbf{u}[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega \quad (20)$$

dove gli spostamenti sono causati da vettori contenenti quantità meccaniche  $\mathbf{f}$  e cinematiche  $-\mathbf{u}$  stratificate note ed incognite, ma anche dalle deformazioni plastiche  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  definite mediante la strategia illustrata nella Sezione 2, che nella presente formulazione è assunta costante in ciascun e-bem.

La condizione di compatibilità fornisce il seguente campo di deformazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^t - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p = \boldsymbol{\varepsilon}^t[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p = \mathbf{D}_x \mathbf{u}[\mathbf{f}, -\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \quad (21)$$

dove  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p$  è il vettore delle deformazioni plastiche nel generico punto Q interno al dominio. La precedente equazione è scritta in forma esplicita

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{eu} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{et} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \mathbf{D}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \quad (22)$$

avendo posto  $\mathbf{G}_{eu} = \mathbf{D}_x \mathbf{G}_{uu}$  e  $\mathbf{G}_{et} = \mathbf{D}_x \mathbf{G}_{ut}$ .

Nell'integrale di dominio che valuta gli effetti del campo delle deformazioni plastiche  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , l'operatore differenziale determina singolarità nel gradiente di spostamento.

Se suddividiamo il dominio in due sottodomini  $\Omega - \Omega_\varepsilon$  ed  $\Omega_\varepsilon$ , dove quest'ultimo è il dominio circolare di esclusione del punto Q, l'ultimo integrale della (22) può essere riscritto come segue:

$$\mathbf{D}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{D}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{D}_x \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p) \quad (23)$$

Il termine  $\mathbf{G}_{u\sigma}$ , presente nell'integrale relativo al dominio circolare di esclusione, dopo una trasformazione in coordinate polari assume la forma di funzione circolare, pertanto il suo integrale risulta nullo.

Si introduca nella espressione (23) delle deformazioni la seguente regolarizzazione:

$$\mathbf{D}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_x \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \mathbf{G}_{u\sigma} d\Omega \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \quad (24)$$

Il primo integrale è regolare e pertanto l'operatore differenziale può essere applicato direttamente alla soluzione fondamentale. Il secondo integrale è trasferito sul contorno mediante la tecnica RIM [8] prima dell'applicazione dell'operatore differenziale, ottenendo:

$$\mathbf{D}_x \int_{\Omega} \mathbf{G}_{u\sigma} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p) d\Omega + \mathbf{D}_x \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} \mathbf{n}' \mathbf{r} d\Gamma \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \quad (25)$$

Se adesso si applica l'operatore differenziale al secondo integrale e si considera la posizione  $\mathbf{D}_x(\cdot) = -\mathbf{D}_{x'}(\cdot)$ , si ottiene:

$$\mathbf{D}_x \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} \mathbf{n}' \mathbf{r} d\Gamma \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} \mathbf{n}' \mathbf{r} d\Gamma \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p - \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p. \quad (26)$$

Poiché il primo termine è un integrale circolare, è valida la seguente condizione:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} \mathbf{n}' \mathbf{r} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (27)$$

Pertanto il campo delle deformazioni e delle tensioni assume la seguente forma regolarizzata:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\varepsilon t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\varepsilon\sigma} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p) d\Omega - \left( \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma u} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{\sigma t} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\sigma\sigma} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p) d\Omega - \mathbf{E} \left( \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \end{aligned} \quad (28a-b)$$

Applicando la formula di Cauchy nella (28b), si ottiene l'I.S. delle trazioni su un elemento di normale  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t} = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tn} (-\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tn} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p) d\Omega - \mathbf{N}^T \mathbf{E} \left( \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma + \mathbf{I} \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_Q^p \quad (29)$$

Allo scopo di valutare la trazione su un elemento del contorno discretizzato, è necessario effettuare un'operazione di limite dall'interno del corpo. Il primo integrale è interpretato come CPV a cui il termine libero  $\mathbf{f}/2$  è associato. Il quarto integrale, dove il *Bui free term* [6] è presente in forma implicita, conduce ad un termine equivalente al CPV e due contributi ottenibili in forma chiusa. In Figura 1, Q rappresenta il punto, posto a distanza  $d$  dal contorno, dove la trazione deve essere valutata secondo una giacitura assunta parallela alla normale all'elemento di contorno generico.

L'operazione di limite conduce ad un coefficiente che si può ricavare in forma chiusa a cui si sommano due termini *jump*: il primo corrisponde a metà del *Bui free term*, cioè  $(1/2)\mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{J}$ , il secondo  $\mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{J}_b$  contiene appropriate funzioni trigonometriche. In particolare:

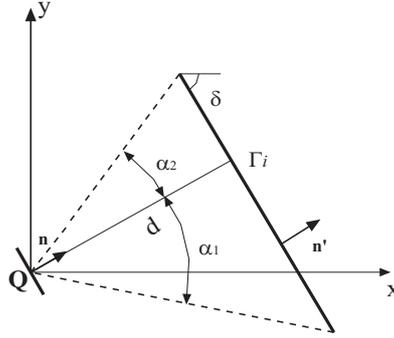


Figura 1: Contributo della trazione sull'elemento di contorno.

1° termine *jump*: quando il punto Q si avvicina al contorno ( $d \rightarrow 0$ ) dall'interno del corpo, il contributo  $(1/2)\mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{J}$  è ottenuto ponendo  $\alpha_1 \rightarrow -\pi/2$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ . Semplici considerazioni permettono di osservare che, qualunque sia la geometria del corpo, la stessa quantità si ottiene sommando i contributi di tutti i restanti lati.

2° termine *jump*: il termine addizionale  $\mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{J}_b$  dipende dalla giacitura dell'elemento di contorno  $\Gamma_i$  a cui l'elemento infinitesimo si appropria cioè:

$$\lim_{d \rightarrow 0^-} \mathbf{N}^T \mathbf{E} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_i = \mathbf{N}^T \mathbf{E} \oint_{\Gamma_i} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma_i + \mathbf{N}^T \mathbf{E} \left( \frac{1}{2} \mathbf{J} + \mathbf{J}_b \right) \quad (30)$$

Nell'ipotesi di  $\bar{\epsilon}^p = \text{cost.}$ , l'ultima condizione permette di riscrivere la (29), qui riportata con la (20). Quest'ultima è stata modificata utilizzando solamente la tecnica RIM.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{u} + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{u\sigma} (\mathbf{n}^T \mathbf{r}) d\Gamma \cdot \bar{\epsilon}_Q^p \\ \mathbf{t} &= \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{tt} \mathbf{f} d\Gamma + \frac{1}{2} \mathbf{f} + \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}) d\Gamma - \mathbf{N}^T \mathbf{E} \oint_{\Gamma} \mathbf{N}' \mathbf{G}_{u\sigma} d\Gamma \cdot \bar{\epsilon}_Q^p - \mathbf{N}^T \mathbf{E} \left( \frac{1}{2} \mathbf{J} + \mathbf{J}_b \right) \cdot \bar{\epsilon}_Q^p \end{aligned} \quad (31a,b)$$

Per ottenere i coefficienti del sistema (5), i termini presenti nelle (31) devono essere pesati sul contorno, prerogativa del BEM Simmetrico alla Galerkin.

#### 4 RISULTATI NUMERICI

Nel seguente test, effettuato mediante il codice di calcolo Karnak.sGbem [10], è stata analizzata una piastra con foro circolare, soggetta ad una trazione  $q = 100000 \text{ daN/m}$  amplificata di  $\beta$ , nell'ipotesi di stato piano di deformazione (Figura 2). In questo esempio è stato assunto il criterio di snervamento di von Mises nelle ipotesi di materiale elastico-perfettamente plastico e legge di flusso associata.

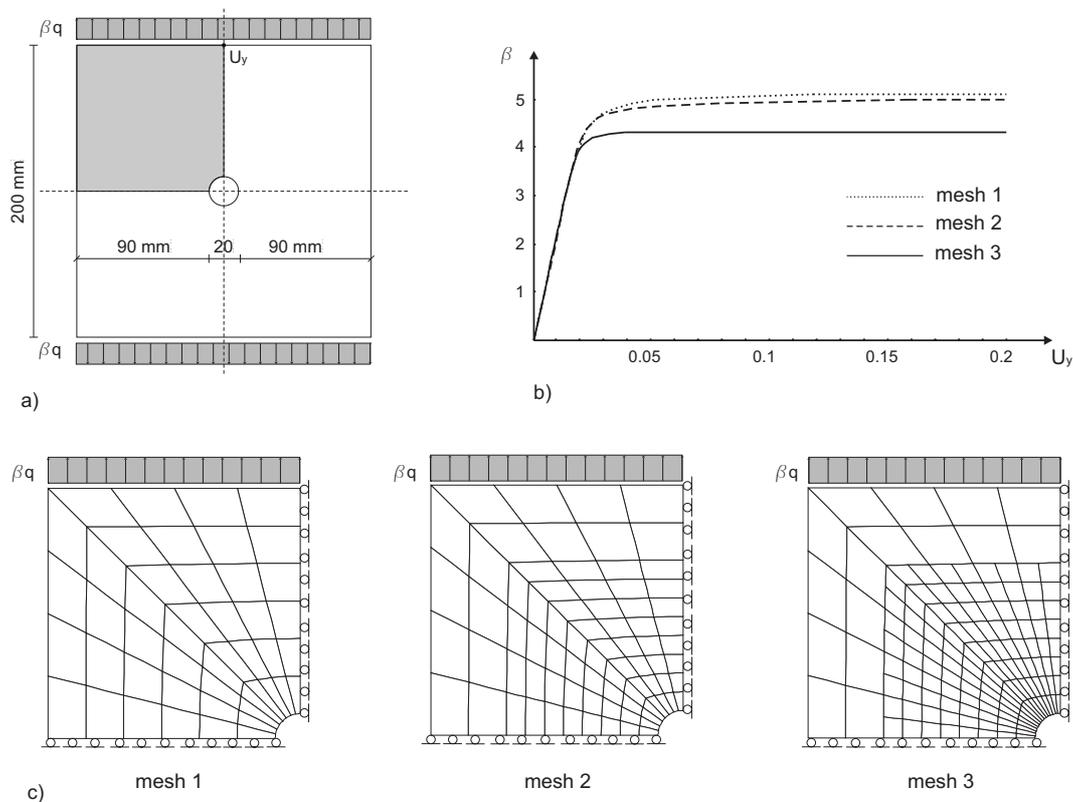


Figura 2: Piastra con foro circolare: a) geometria del sistema; b) confronto curve carico-spostamenti; c) discretizzazioni in e-bem.

I parametri del materiale sono: il modulo di Young  $E = 2067000 \text{ daN/cm}^2$ , il coefficiente di Poisson  $\nu = 0.29$  ed il valore di snervamento monoassiale  $\sigma_y = 4500 \text{ daN/cm}^2$  (Figura 2-a). Gli e-bem impiegati sono caratterizzati da un contorno discretizzato con l'introduzione di 8 nodi. La (Figura 2-b) mostra l'efficienza dell'e-bem utilizzato anche nel caso di mesh rade.

## 5 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro sono stati studiati gli aspetti computazionali di una strategia che utilizza il SBEM e una consolidata tecnica di rientro in elastoplasticità. La metodologia è stata sviluppata nell'ipotesi di stato piano di deformazione e utilizzando il modello elastico-perfettamente plastico di von Mises, ma la sua generalità consente di applicarla anche a modelli più complessi, come per esempio in presenza di incrudimento.

L'analisi elastica è stata effettuata mediante un approccio agli spostamenti nell'ambito del SBEM ed è stato mostrato il vantaggio di operare con un sistema risolvibile dove le uniche incognite sono le quantità cinematiche nodali di interfaccia.

La soluzione elastoplastica è stata ottenuta scindendo la legge costitutiva nella sua parte elastica e plastica. Quindi è stato utilizzato un algoritmo di rientro allo scopo di correggere la soluzione elastica qualora quest'ultima violi la condizione di ammissibilità plastica. I problemi computazionali relativi alle equazioni integrali di dominio generati dalle azioni plastiche sono risolti mediante una procedura in grado di trasformarli in integrali da effettuarsi sul contorno e di eliminare le singolarità presenti nei loro nuclei. Questa strategia, che utilizza solamente coefficienti in forma chiusa, è stata implementata all'interno del codice di calcolo Karnak.sGbem, mediante il quale è stato effettuato il test numerico mostrato.

#### *Riferimenti bibliografici*

- [1] Panzeca, T., Cucco, F., Terravecchia, S., "Symmetric Boundary Element Method versus Finite Element Method". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **191**, 3347-3367 (2002).
- [2] Bilotta A., Casciaro R., "A high-performance element for the analysis of 2D elastoplastic continua". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **196**, 818-828 (2006).
- [3] Ponter A. R. S., Martin J. B., "Some extremal properties and energy theorems for inelastic materials and their relationship to the deformation theory of plasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, **20**, 281-300 (1972).
- [4] Ortiz M., Martin J.B., "Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: a unification of concepts". *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, **28**, 1839-1853 (1989).
- [5] Cocchetti G., Perego U., "A rigorous bound on error in backward-difference elastoplastic time-integration". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **192**, 4909-4927 (2003).
- [6] Bui H. D., "Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equation". *Int. J. of Solids and Structures.*, **14**, 935-939 (1978).
- [7] Panzeca T., Terravecchia S., Zito L., "Computational Aspects in thermoelasticity by the symmetric boundary element method", in *Advances in on Boundary Element Techniques IX* (BeTeq, Seville, Spain, 9-11 July 2008), EC Ltd, United Kingdom, 355-362 (2008).
- [8] Gao XW. "The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization". *Engng. Analysis with Boundary Elements*, **26**, 905-939 (2002).
- [9] Gao XW, Davies TG. "An effective boundary element algorithm for 2D and 3D elastoplastic problem". *Int. J. of Solids and Structures*, **37**, 4987-5008 (2000).
- [10] Cucco F., Panzeca T., Terravecchia S., "The program Karnak.sGbem Release 2.0" (2008).