

Modellazione lineare delle grandezze di contorno nell'analisi per sottostrutture delle piastre inflesse via SBEM

Teotista Panzeca¹, La Mantia Alessandro¹, Salerno Maria¹, Terravecchia Silvio¹

¹DISAG, Università degli Studi di Palermo
E-mail: tpanzeca@tiscali.it

Parole chiave: Symmetric Boundary Element Method, sottostrutturazione, piastra inflessa.

SOMMARIO. Lo scopo di questo lavoro è quello di effettuare un'analisi multi-dominio di piastre inflesse nell'ambito dell'approccio simmetrico del Metodo degli Elementi di Contorno. La piastra viene suddivisa in macro-elementi, connessi tra loro lungo il contorno d'interfaccia, introducendo funzioni di forma lineari sia nella modellazione delle grandezze di contorno della piastra che nella pesatura della risposta come mostrato in Panzeca e Salerno [3] nelle lastre. Tali funzioni lineari impiegate nelle piastre, in controtendenza con quanto operato da altri ricercatori, sono utilizzate nella determinazione in forma chiusa di tutti i coefficienti del sistema risolvibile e del vettore di carico. Alcuni aspetti computazionali sono mostrati ed utilizzati in una semplice applicazione.

INTRODUZIONE

Nell'ambito del metodo simmetrico degli elementi di contorno (SBEM), l'approccio per sottodomini, introdotto da Maier et al. [1], consente l'analisi di un solido continuo mediante la suddivisione in macro-elementi, aventi ciascuno differenti caratteristiche fisiche e geometriche. Questo approccio è stato applicato con successo nell'analisi di lastre da numerosi ricercatori, come Gray e Paulino [2], Panzeca e Salerno [3], Vodicka et al. [4], i quali ne hanno evidenziato le peculiarità e i vantaggi computazionali sia per la forte riduzione delle variabili del sistema, sia per la facilità con cui la discretizzazione può essere generata e modificata. Tale metodo peraltro risulta vantaggioso nell'analisi di problemi di ingegneria quali il contatto, la frattura, il danno, la plasticità ed anche nell'analisi di sistemi strutturali dove è utile l'accoppiamento SBEM-FEM. Nell'ambito del BEM per collocazione un approccio per sottodomini di piastre comunque vincolate è stato impiegato da De Paiva e Aliabadi [5,6].

La piastra viene suddivisa in macro-elementi (e-bem), connessi tra loro lungo il contorno d'interfaccia e assemblati attraverso la introduzione di una forte condizione di regolarità sulle quantità cinematiche (uguali spostamenti e rotazioni dei nodi all'interfaccia), ed una debole regolarità sulle quantità meccaniche (equilibrio generalizzato tra le distribuzioni delle sforzi taglianti e dei momenti lungo il contorno di interfaccia). La strategia seguita è quella di determinare analiticamente una matrice, definita caratteristica, ottenuta senza distinguere la tipologia del contorno (libero o vincolato), per ciascun e-bem. In questa matrice le cause sono la distribuzione di quantità meccaniche e cinematiche definite sui valori nodali, mentre gli effetti sono analoghe quantità generalizzate valutate lungo i lati del contorno. Dalla matrice caratteristica possono essere estratti i coefficienti del sistema

risolvente e del vettore di carico, pervenendo così alla formulazione agli spostamenti, in analogia con il FEM.

In questo lavoro viene introdotto un macro-elemento rettangolare a 8 nodi a lati diseguali, dove la modellazione delle grandezze cinematiche e meccaniche sul contorno, nonché la pesatura delle corrispondenti azioni generalizzate viene effettuata con l'impiego di funzioni di forma lineari. Questo aspetto è innovativo rispetto a quanto viene fatto da altri ricercatori che utilizzano, invece, funzioni di forma di grado superiore.

1 APPROCCIO PER SOTTOSTRUTTURE

Si consideri una piastra elastica di dominio Ω e contorno Γ , distinto in contorno vincolato Γ_1 e libero Γ_2 . La piastra è soggetta alle seguenti azioni esterne:

- forze di volume \bar{p} applicate normalmente alla superficie media del dominio Ω ;
- spostamenti e rotazioni $\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_n & \bar{\varphi}_n & \bar{\varphi}_{sn} \end{bmatrix}^T$ imposti sul contorno vincolato Γ_1 ;
- forze e coppie $\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_n & \bar{c}_n & \bar{c}_{sn} \end{bmatrix}^T$ imposte sul contorno libero Γ_2 .

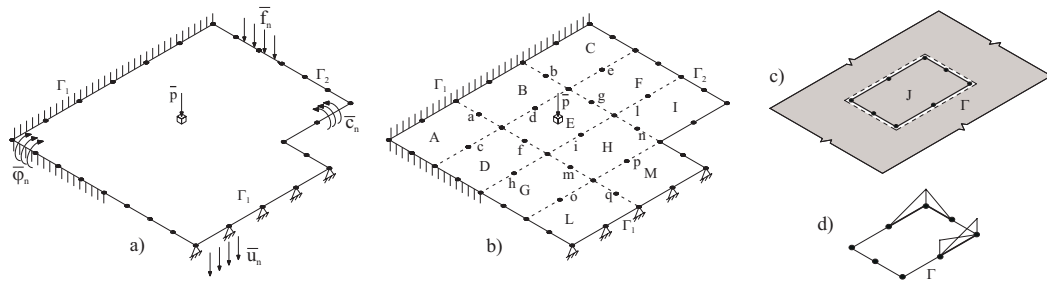


Figura 1: a) Sistema continuo, b) sistema suddiviso in sottostrutture (macro-elementi A, B, ..., M), c) macro-elemento J immerso nel dominio illimitato, d) modellazione delle forze e dei momenti, degli spostamenti e delle rotazioni.

Si vuole ottenere la risposta elastica lungo il contorno caratterizzato dalla normale uscente \mathbf{n} :

- forze e coppie $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_n & c_n & c_{sn} \end{bmatrix}^T$ su Γ_1 ;
- spostamenti e rotazioni $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_n & \varphi_n & \varphi_{sn} \end{bmatrix}^T$ su Γ_2 .

Nel caso in cui le proprietà fisiche e geometriche della piastra sono diverse da zona a zona, si opera una suddivisione del solido in macroelementi. Questa suddivisione conduce all'introduzione di un contorno di interfaccia Γ_0 tra macro-elementi contigui.

Nello studio di ciascuna sottostruttura viene usata una strategia generale, basata sull'introduzione di una matrice \mathbf{B} , chiamata caratteristica. Il macroelemento è immerso in un dominio illimitato e per il suo contorno non viene attuata nessuna distinzione tra contorno libero, vincolato o di interfaccia: su di esso possiamo considerare applicate una distribuzione \mathbf{f} di forze o coppie (flettenti, torcenti), ed anche una distribuzione $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ di discontinuità di spostamenti o rotazioni (flessionali, torsionali). Gli effetti sono valutati in forma generalizzata sul contorno del dominio complementare.

La risposta in termini di quantità cinematiche \mathbf{u} e meccaniche \mathbf{t} in ogni punto del contorno Γ^+ è data dalle Identità di Somigliana.

Imponendo le condizioni al contorno $\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}$ e $\mathbf{t}^+ = \mathbf{0}$ su Γ^+ si ottengono le seguenti equazioni scritte in forma compatta:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^+ [\mathbf{f}] + \mathbf{u}_{pV}^+ [-\mathbf{u}] - \frac{1}{2} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}^+ [\bar{p}] = \mathbf{0} \quad (1a)$$

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}_{pV}^+ [\mathbf{f}] - \frac{1}{2} \mathbf{f} + \mathbf{t}^+ [-\mathbf{u}] + \hat{\mathbf{t}}^+ [\bar{p}] = \mathbf{0} \quad (1b)$$

dove sono valide le seguenti posizioni:

$$\mathbf{u}^+ [\mathbf{f}] = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{uu} \mathbf{f} d\Gamma, \quad \mathbf{u}_{pV}^+ [-\mathbf{u}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{ut} (-\mathbf{u}) d\Gamma, \quad \hat{\mathbf{u}}^+ [\bar{p}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{uu} \bar{p} d\Omega \quad (2a-c)$$

$$\mathbf{t}_{pV}^+ [\mathbf{f}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}_{tu} \mathbf{f} d\Gamma, \quad \mathbf{t}^+ [-\mathbf{u}] = \int_{\Gamma} \mathbf{G}_{tt} (-\mathbf{u}) d\Gamma, \quad \hat{\mathbf{t}}^+ [\bar{p}] = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{tu} \bar{p} d\Omega \quad (2d-f)$$

dove \mathbf{G}_{hk} ($h,k=u,t$) sono le matrici delle soluzioni fondamentali delle piastre (Panzeca et al. [7]).

Si opera la discretizzazione del contorno e si introduce su di esso la modellazione di tipo lineare delle grandezze meccaniche e cinematiche

$$\mathbf{f} = \Psi_f \mathbf{F}, \quad \mathbf{u} = \Psi_u \mathbf{U} \quad (3a-b)$$

dove \mathbf{F} e \mathbf{U} sono i vettori che raccolgono le quantità nodali secondo la convenzione nodale (che è anche generale) indicata in Fig.2.

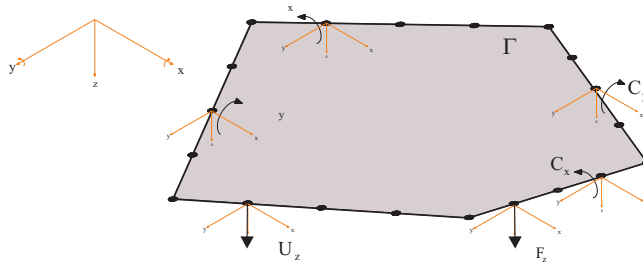


Figura 2: Grandezze di contorno nodali di ciascuna sottostruttura.

Il processo di pesatura secondo l'impiego dell'approccio alla Galerkin, permette di ottenere le seguenti equazioni integrali al contorno :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^+ \\ \mathbf{P}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{ut} + \mathbf{C}_{ut} \\ \mathbf{A}_{tu} - \mathbf{C}_{tu} & \mathbf{A}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_p \\ \hat{\mathbf{P}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4a)$$

In forma compatta si ottiene:

$$\mathbf{B} \mathbf{X} + \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \quad (4b)$$

dove la seguente matrice \mathbf{B} è non simmetrica e singolare

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} W_z^+ \\ \Phi_x^+ \\ \Phi_y^+ \\ T_z^+ \\ M_x^+ \\ M_y^+ \end{matrix} \begin{matrix} F_z & C_x & C_y & \Delta U_z & \Delta \Phi_x & \Delta \Phi_y \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{B}_{uu} & \mathbf{B}_{u\phi_x} & \mathbf{B}_{u\phi_y} & \mathbf{B}_{ut} & \mathbf{B}_{um_x} & \mathbf{B}_{um_y} \\ \mathbf{B}_{\phi_x u} & \mathbf{B}_{\phi_x \phi_x} & \mathbf{B}_{\phi_x \phi_y} & \mathbf{B}_{\phi_x t} & \mathbf{B}_{\phi_x m_x} & \mathbf{B}_{\phi_x m_y} \\ \mathbf{B}_{\phi_y u} & \mathbf{B}_{\phi_y \phi_x} & \mathbf{B}_{\phi_y \phi_y} & \mathbf{B}_{\phi_y t} & \mathbf{B}_{\phi_y m_x} & \mathbf{B}_{\phi_y m_y} \\ \mathbf{B}_{tu} & \mathbf{B}_{t\phi_x} & \mathbf{B}_{t\phi_y} & \mathbf{B}_{tt} & \mathbf{B}_{tm_x} & \mathbf{B}_{tm_y} \\ \mathbf{B}_{m_x u} & \mathbf{B}_{m_x \phi_x} & \mathbf{B}_{m_x \phi_y} & \mathbf{B}_{m_x t} & \mathbf{B}_{m_x m_x} & \mathbf{B}_{m_x m_y} \\ \mathbf{B}_{m_y u} & \mathbf{B}_{m_y \phi_x} & \mathbf{B}_{m_y \phi_y} & \mathbf{B}_{m_y t} & \mathbf{B}_{m_y m_x} & \mathbf{B}_{m_y m_y} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4c)$$

Nel presente lavoro tutti i coefficienti della matrice \mathbf{B} sono stati calcolati in forma chiusa.

Si è proceduto ad una selezione delle righe e delle colonne della matrice caratteristica e al suo riordino, come conseguenza della suddivisione in contorno vincolato Γ_1 , libero Γ_2 e di interfaccia Γ_0 , ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{W}}_2^+ \\ \overline{\mathbf{W}}_1^+ \\ \overline{\mathbf{W}}_0^+ \\ \overline{\mathbf{P}}_2^+ \\ \overline{\mathbf{P}}_0^+ \\ \overline{\mathbf{P}}_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u2u2} & \mathbf{A}_{u2u1} & \mathbf{A}_{u2u0} & \overline{\mathbf{A}}_{u2t2} & \mathbf{A}_{u2t0} & \mathbf{A}_{u2t1} \\ \mathbf{A}_{u1u2} & \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u0} & \mathbf{A}_{u1t2} & \mathbf{A}_{u1t0} & \overline{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{u0u2} & \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t2} & \overline{\mathbf{A}}_{u0t0} & \mathbf{A}_{u0t1} \\ \overline{\mathbf{A}}_{t2u2} & \overline{\mathbf{A}}_{t2u1} & \overline{\mathbf{A}}_{t2u0} & \overline{\mathbf{A}}_{t2t2} & \overline{\mathbf{A}}_{t2t0} & \overline{\mathbf{A}}_{t2t1} \\ \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0u1} & \mathbf{A}_{t0u0} & \mathbf{A}_{t0t2} & \mathbf{A}_{t0t0} & \mathbf{A}_{t0t1} \\ \overline{\mathbf{A}}_{t1u2} & \overline{\mathbf{A}}_{t1u1} & \overline{\mathbf{A}}_{t1u0} & \overline{\mathbf{A}}_{t1t2} & \overline{\mathbf{A}}_{t1t0} & \overline{\mathbf{A}}_{t1t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_2 \\ \overline{\mathbf{F}}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\overline{\mathbf{U}}_2 \\ -\overline{\mathbf{U}}_0 \\ -\overline{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

I vettori nodali \mathbf{F} e \mathbf{U} sono definiti come segue:

$$\mathbf{F} = [\overline{\mathbf{F}}_2^T \quad \mathbf{F}_1^T \quad \mathbf{F}_0^T]^T \quad \text{e} \quad (-\mathbf{U}) = [-\overline{\mathbf{U}}_2^T \quad -\overline{\mathbf{U}}_0^T \quad -\mathbf{U}_1^T]^T \quad \text{su } \Gamma \quad (6a-b)$$

dove viene fatta una distinzione tra quantità nodali note e incognite e tra i differenti contorni.

In modo analogo sono definiti i vettori delle quantità generalizzate (pesate) \mathbf{W}^+ e \mathbf{P}^+ :

$$\mathbf{W}^+ = [\mathbf{W}_2^{+T} \quad \mathbf{W}_1^{+T} \quad \mathbf{W}_0^{+T}]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{P}^+ = [\mathbf{P}_2^{+T} \quad \mathbf{P}_0^{+T} \quad \mathbf{P}_1^{+T}]^T \quad \text{su } \Gamma^+ \quad (7a-b)$$

Allo scopo di ottenere gli operatori algebrici necessari per la soluzione del problema, si introducono appropriate condizioni scritte in forma generalizzata sul contorno degli elementi:

- le condizioni generalizzate di Dirichlet e Neumann sul contorno Γ_1^+ e Γ_2^+

$$\mathbf{W}_1^+ = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_1^+ \quad \mathbf{P}_2^+ = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_2^+ \quad (8a-b)$$

- le condizioni cinematiche generalizzate scritte sul contorno di interfaccia Γ_0^+

$$\mathbf{W}_0^+ = \mathbf{0} \quad \text{su} \quad \Gamma_0^+ \quad (8c)$$

Invece il vettore \mathbf{P}_0 , che relaziona grandezze sul contorno di interfaccia, è valutato sul contorno Γ_0 in quanto fa parte delle condizioni di regolarità che consentono di ottenere il sistema risolvibile nel processo di assemblaggio.

Questo riordino permette di ottenere le seguenti equazioni, dove le quantità note di contorno e di dominio risultano distinte dalle grandezze incognite:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^+ = 0 \\ \mathbf{W}_0^+ = 0 \\ \mathbf{P}_2^+ = 0 \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u1} & \mathbf{A}_{u1u0} & \mathbf{A}_{u1t2} & \mathbf{A}_{u1t0} \\ \mathbf{A}_{u0u1} & \mathbf{A}_{u0u0} & \mathbf{A}_{u0t2} & \mathbf{A}_{u0t0} \\ \mathbf{A}_{t2u1} & \mathbf{A}_{t2u0} & \mathbf{A}_{t2t2} & \mathbf{A}_{t2t0} \\ \mathbf{A}_{t0u1} & \mathbf{A}_{t0u0} & \mathbf{A}_{t0t2} & \mathbf{A}_{t0t0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{U}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u1u2} & \bar{\mathbf{A}}_{u1t1} \\ \mathbf{A}_{u0u2} & \mathbf{A}_{u0t1} \\ \bar{\mathbf{A}}_{t2u2} & \mathbf{A}_{t2t1} \\ \mathbf{A}_{t0u2} & \mathbf{A}_{t0t1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_2 \\ -\bar{\mathbf{U}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^+ \\ \hat{\mathbf{W}}_0^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_2^+ \\ \hat{\mathbf{P}}_0^+ \end{bmatrix} \quad (9)$$

L'eq. (9) può essere scritta in forma compatta

$$\mathbf{0} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{H}_0(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{L}_u(-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{L}_p \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}_0^T \mathbf{X} + \mathbf{H}_{00}(-\mathbf{U}_0) + \mathbf{A}_{t0u2} \bar{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{A}_{t0t1}(-\bar{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{L}_{0p} \quad (11)$$

dove il vettore \mathbf{U}_0 contiene gli spostamenti e le rotazioni dei nodi del contorno Γ_0 .

Sostituendo il vettore \mathbf{X} ottenuto dalla relazione (10) nella (11), si ottiene la seguente equazione sforzi generalizzati-spostamenti nodali:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_0 \mathbf{U}_0 + \hat{\mathbf{P}}_0 \quad (12)$$

dove si è posto

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{00} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \hat{\mathbf{L}}_0 - \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{L}} \quad (14)$$

L'eq. (12) relaziona le quantità meccaniche generalizzate \mathbf{P}_0 associate ai nodi di Γ_0 alle quantità cinematiche \mathbf{U}_0 dei nodi dello stesso contorno e del vettore di carico $\hat{\mathbf{P}}_0$. L'operatore algebrico \mathbf{D}_0 è la matrice di rigidità della sottostruttura in esame ed è simmetrica e singolare.

2 ASPETTI COMPUTAZIONALI

Nel presente lavoro la piastra è assunta rettangolare ed è riferita ad una terna cartesiana generale $(0, x, y, z)$, parallela ai lati della piastra, rispetto a cui sono riferite tutte le grandezze nodali sul contorno, e cioè sia il vettore distorsione $\Delta\mathbf{U} = [\Delta\mathbf{U}^T \quad \Delta\Phi_x^T \quad \Delta\Phi_y^T]^T$, sia il vettore contenente le azioni meccaniche $\mathbf{F} = [\mathbf{F}^T \quad \mathbf{C}_n^T \quad \mathbf{C}_{sn}^T]^T$.

Definiamo distorsioni associate al nodo del contorno, la differenza tra gli spostamenti indipendenti

del nodo pensato appartenente alla frontiera Γ^+ del dominio $\Omega_\infty \setminus \Omega$, nulli a soluzione ottenuta, e gli spostamenti indipendenti dello stesso nodo pensato appartenente alla frontiera Γ del dominio Ω della piastra. Al fine di ottenere i coefficienti della matrice \mathbf{B} , le distorsioni sono assunte unitarie, cioè: $\Delta U = U^+ - U = -U = 1$; $\Delta \Phi_x = \Phi_x^+ - \Phi_x = -\Phi_x = 1$; $\Delta \Phi_y = \Phi_y^+ - \Phi_y = -\Phi_y = 1$

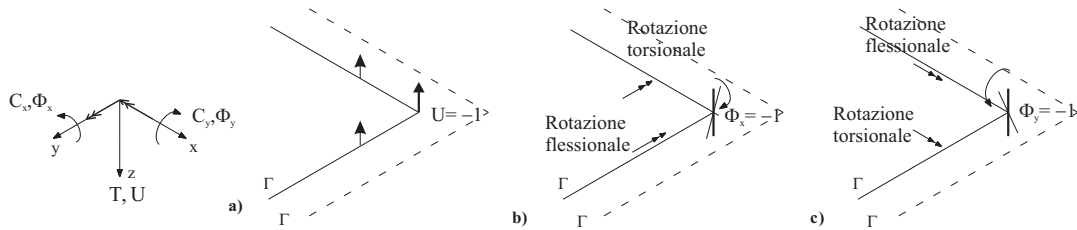


Figura 3: a) Distorsione verticale $-U = 1$ e distribuzione lungo i lati del contorno; Distorsione rotazionale: b) $-\Phi_x = 1$ e c) $-\Phi_y = 1$ e distribuzione lungo i lati del contorno.

Si vuole determinare un coefficiente della matrice \mathbf{A}_{tt} , ed in particolare il momento generalizzato M_x associato al nodo 1 e causato da una distorsione rotazionale $-\Phi_x = 1$ applicata allo stesso nodo. Il coefficiente può essere ottenuto attraverso una doppia integrazione, la prima riguardante la modellazione della causa e la seconda la pesatura dell'effetto. Per modellare le cause e pesare gli effetti sono state impiegate funzioni di forma di tipo lineare, scelta che comporta l'insorgere di singolarità di tipo $1/\xi$. La determinazione in forma chiusa del coefficiente è effettuata impiegando la tecnica della scomposizione delle cause e della ricomposizione degli effetti.

La distorsione imposta al nodo 1 si traduce sui lati contigui in una distribuzione di distorsioni flessionali lungo il lato h e torsionali lungo il lato a . Il momento generalizzato M_x al nodo 1 si ottiene come somma dell'effetto generalizzato sul lato a (momento torcente) e sul lato h (momento flettente).

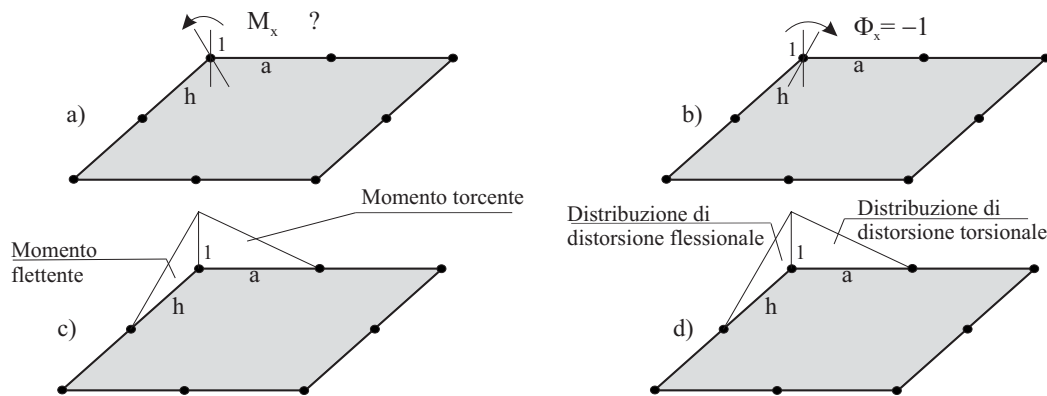


Figura 4: a) Effetto nel nodo 1: momento generalizzato M_x , b) Causa nel nodo 1: distorsione $\Delta \Phi_x = 1$, cioè $-\Phi_x = 1$, c) Pesatura degli effetti: momenti, d) Modellazione della causa: distorsioni.

Il coefficiente che si vuole determinare si ottiene come somma di due parti, e precisamente: “a” e “h”, che esprimono rispettivamente l’effetto pesato sul lato a e l’effetto pesato sul lato h. Ogni parte a sua volta si ottiene come somma di due contributi che tengono conto della distribuzione delle cause sui lati concorrenti nel nodo in esame. Più precisamente l’effetto “a” è dato dalla somma dell’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato a (“aa”) e dall’effetto causato dalla distribuzione di distorsione lungo il lato h (“ah”). In modo simile è definito l’effetto “h”.

E’ di seguito riportata la sequenza delle operazioni relative al calcolo del coefficiente in esame:

- Effetto in a, causa: distribuzioni in a e h

$$aa = \int_0^1 G_{tt} \Psi_a(\xi') J'_a d\xi' \quad (15)$$

$$ah = \int_0^1 G_{tt} \Psi_h(\xi') J'_h d\xi' \quad (16)$$

$$a = (aa + ah) J_a = \frac{E h^3 (-1 + \nu)}{48(1 - \nu^2) \pi} \left(\frac{(-1 + \nu) r^2 (-1 + \xi)}{s^2 + r^2 (-1 + \xi)^2} + 2 \frac{r}{s} \text{Arc tan} \left(\frac{s}{r (-1 + \xi)} \right) + (-1 + \nu) (\text{Log}(-1 + \xi) - \text{Log}(\xi)) - \frac{2}{-1 + \xi} \right) \quad (17)$$

- Effetto in h, causa: distribuzione in a e h

$$ha = \int_0^1 G_{tt} \Psi_a(\xi') J'_a d\xi' \quad (18)$$

$$hh = \int_0^1 G_{tt} \Psi_h(\xi') J'_h d\xi' \quad (19)$$

$$h = (ha + hh) J_h = \frac{E h^3 (-1 + \nu)}{48(1 - \nu^2) \pi} \left(-\frac{(-1 + \nu) s^2 (-1 + \xi)}{r^2 + s^2 (-1 + \xi)^2} + 2 \nu \frac{s}{r} \text{Arc tan} \left(\frac{r}{s (-1 + \xi)} \right) + (3 + \nu) (\text{Log}(-1 + \xi) - \text{Log}(\xi)) + \frac{2}{-1 + \xi} \right) \quad (20)$$

Si fa notare che nei termini a ed h risultano presenti singolarità forti e che tali singolarità si manifestano nel punto di contatto tra i due elementi di contorno.

Al fine di determinare il momento generalizzato M_x , si sommano gli effetti in a ed h, ottenendo la naturale eliminazione della singolarità, e si procede alla successiva pesatura. Pertanto si ha:

$$\int_0^1 \Psi(\xi) (a + h) d\xi = -\frac{E h^3}{96(1 + \nu) \pi r s} \left(\frac{\pi(r^2 + \nu s^2) + 2(r^2 - \nu s^2)}{r s} \left(\text{Arc tan} \frac{r}{s} - \text{Arc tan} \frac{s}{r} \right) + 2(1 + \nu) (\text{Log}(r) + \text{Log}(s) - \text{Log}(r^2 + s^2)) \right) \quad (22)$$

3 PROCESSO DI ASSEMBLAGGIO

Si considerino le relazioni (12) associate agli J e-bem ($J = A, B, \dots, N$) in cui è stata suddivisa la struttura e si riportano tali relazioni in un’unica espressione globale

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} \mathbf{U} + \hat{\mathbf{P}} \quad (23)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{P}_A^T, \mathbf{P}_B^T, \dots, \mathbf{P}_N^T]^T, \quad \hat{\mathbf{P}} = [\hat{\mathbf{P}}_A^T, \hat{\mathbf{P}}_B^T, \dots, \hat{\mathbf{P}}_N^T]^T \\ \mathbf{U} &= [\mathbf{U}_A^T, \mathbf{U}_B^T, \dots, \mathbf{U}_N^T]^T, \quad \mathbf{D} = \text{diag}[\mathbf{D}_A, \mathbf{D}_B, \dots, \mathbf{D}_N] \end{aligned} \quad (24a-d)$$

dove i vettori \mathbf{P} ed \mathbf{U} contengono le quantità meccaniche generalizzate di interfaccia (sforzi taglianti e momenti) e le corrispondenti quantità nodali cinematiche (spostamenti e rotazioni) sui nodi di interfaccia di tutte le sottostrutture, mentre \mathbf{D} è la matrice diagonale di rigidezza. Il vettore $\hat{\mathbf{P}}$ è il termine di carico e rappresenta lo stato di sforzo generalizzato, causato da azioni note, associato a tutti gli elementi di interfaccia.

Si introduca il vettore degli spostamenti dei nodi di interfaccia, comuni agli e-bem contigui

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_a^T, \mathbf{u}_b^T, \dots, \mathbf{u}_m^T]^T \quad (25)$$

dove il pedice caratterizza il lato di interfaccia.

Si impongono le condizioni di regolarità sugli spostamenti nodali tramite la seguente equazione:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{u} \quad (26)$$

dove \mathbf{Z} è un appropriata matrice di compatibilità.

Le condizioni di equilibrio scritte in termini di grandezze generalizzate risultano:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (27)$$

L'uso delle equazioni (23), (26) e (27) conduce alla seguente equazione risolvente:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (28)$$

dove si è posto

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}, \quad \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{P}} \quad (29a-b)$$

La matrice di rigidezza \mathbf{K} è simmetrica e definita.

Le equazioni risolventi sono ottenute in termini di spostamenti nodali. Le rimanenti quantità di contorno della piastra suddivisa in e-bem, riguardanti il vettore \mathbf{F}_1 (forze e momenti di reazione nei nodi del contorno vincolato Γ_1), il vettore \mathbf{U}_2 (spostamenti dei nodi liberi di Γ_2) e il vettore \mathbf{F}_0 (forze e momenti mutui dei nodi del contorno Γ_0) sono ottenute usando l'eq. (10) valida per ogni e-bem.

4 ESEMPIO

L'approccio proposto in questo lavoro viene applicato allo studio di una piastra inflessa suddivisa in due zone aventi differenti coefficienti di rigidezza $D = (E h^3)/(12(1 - \nu^2))$, già studiata da De Paiva e Aliabadi in [5, 6] nell'ambito del BEM per collocazione.

La piastra appoggiata di Fig.5, è sottoposta ad un carico unitario verticale uniformemente distribuito lungo il piano medio e suddivisa in due zone aventi rigidezze D_1 e D_2 caratterizzate dal rapporto $D_2/D_1 = 3.375$. La piastra è stata suddivisa in 6 e-bem, come mostrato in figura, per ognuno dei quali si è effettuata una discretizzazione del contorno in 8 elementi.

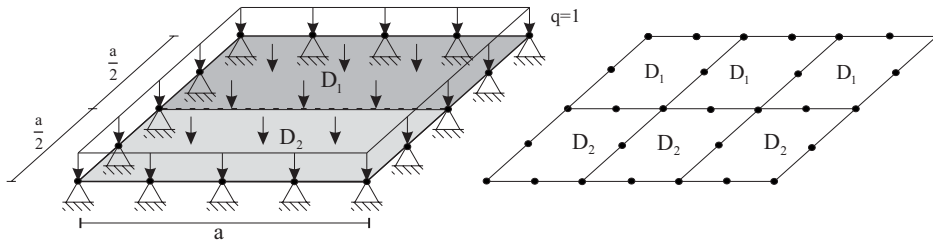


Figura 5: Piastra inflessa caratterizzata da due differenti rigidezze e suddivisa in sei e-bem.

In una prima fase gli e-bem sono esaminati separatamente e per ciascuno di essi sono stati valutati la matrice di rigidezza ed il termine di carico. Successivamente, attraverso il processo di assemblaggio, sono stati ottenuti gli spostamenti e le rotazioni dei nodi d'interfaccia ed infine, usando l'eq. (10), tutte le altre grandezze di contorno.

In Fig.6 sono riportati con linea a tratti le funzioni degli spostamenti e dei momenti M_y lungo l'interfaccia che divide le due zone, e tali funzioni sono confrontate con quelle ottenute da De Paiva e Aliabadi sia con il BEM per collocazione, sia con il FEM.

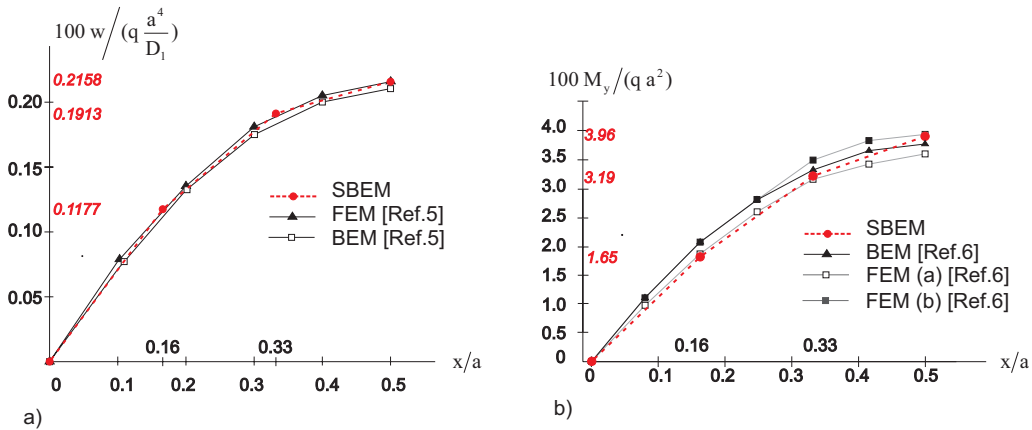


Figura 6: Diagramma degli spostamenti e dei momenti M_y lungo l'interfaccia.

Si osserva un buona concordanza dei risultati soprattutto nel caso degli spostamenti nonostante la utilizzazione di un numero limitato di e-bem, di una discretizzazione del contorno rada, e l'uso di funzioni di forma che modellano le grandezze di contorno di tipo lineare.

5 CONCLUSIONI

In questo articolo è stata presentata un'analisi per sottostrutture di piastre inflesse, nell'ambito della formulazione simmetrica del metodo degli elementi di contorno.

Le principali peculiarità dell'approccio proposto sono:

- impiego di funzioni di forma lineari sia per la modellazione delle grandezze di contorno sia per la pesatura della risposta;
- metodologia computazionale efficace per la valutazione sistematica della matrice caratteristica;
- calcolo in forma chiusa di tutti i coefficienti della matrice caratteristica;
- riduzione delle variabili ai soli spostamenti di interfaccia;
- simmetria della matrice di rigidezza e sua definizione del segno;
- compatibilità ed equilibrio verificati nel dominio per l'uso delle soluzioni fondamentali;
- condizioni di regolarità forti per gli spostamenti e rotazioni dei nodi contigui e condizioni deboli, di tipo generalizzato, per le forze taglianti ed i momenti, tra e-bem.

Riferimenti bibliografici

- [1] Maier, G., Diligenti, M., Carini, A., 1991. A variational approach to boundary element elastodynamics analysis and extension to multidomain problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92,193-213.
- [2] Gray, L.Y., Paulino, G.R., 1997. Symmetric Galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40, 3085-3101.
- [3] Panzeca, T., Salerno, M., 2000. Macro-elements in the mixed boundary value problems. *Comp. Mech.*, 26, 437-446.
- [4] Vodička, R., Mantič, V., Paris, F., 2007. Symmetric Variational Formulation of BIE for Domain Decomposition Problems in Elasticity – An SGBEM approach for Nonconforming Discretizations of curved Interfaces, *CMES* 4, 31-50.
- [5] De Paiva, J.B, Aliabadi M.H., 2000. Boundary element analysis of zoned plates in bending. *Comp. Mech*, 25, 560-566.
- [6] De Paiva, J.B, Aliabadi M.H., 2004. Bending moments at interfaces of thin zoned plates with discrete thickness by the boundary element method. *Engng. Anal. Bound. Elem.*, 28, 747-751.
- [7] Panzeca, T., Milana, V., Salerno, M., 2009. A symmetric Galerkin BEM for plate bending analysis. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 28, 1, 62-74.