

Calcolo con variabili complesse dei coefficienti integrali per la costruzione di un modello BEM simmetrico di lastra inflessa sottile

Mirko Mazza¹, Maurizio Aristodemo¹

¹*Dipartimento di Modellistica per l'ingegneria, Università della Calabria, Italia*

E-mail: mirko.mazza@unical.it, aristodemo@unical.it

Keywords: Symmetric boundary element models, Kirchhoff plate, analytical integration, complex variables, singular fundamental solutions.

SUMMARY. The paper deals with the analytical computation of boundary integral coefficients involved in the analysis of thin plates by a symmetric boundary element model. A complex variable description of the integrands is used in conjunction with a specific complex integration rule. The high singularities of the kernels are eliminated by means of a regularization procedure based on Gauss transformations. The proposed complex variable integration technique lightens symbolic manipulations in comparison with real variable formulations and provides results more compact, also in the case of generically oriented integration domains.

1 INTRODUZIONE

I modelli numerici basati sulla discretizzazione del contorno possono essere sviluppati sia nella forma standard per collocazione che in forma simmetrica [1]. Nell'approccio alla Galerkin i modelli simmetrici per l'analisi di lastre inflesse sottili si ottengono usando equazioni integrali sul contorno associate a sorgenti statiche e cinematiche ed interpolando le distribuzioni delle sorgenti e le variabili di contorno mediante le stesse funzioni di interpolazione [2], [3]. Selezionando le equazioni sulla base delle condizioni al contorno si assembla un sistema simmetrico di equazioni nelle variabili di contorno.

Il calcolo dei coefficienti del sistema simmetrico richiede particolare cura nella soluzione dei problemi computazionali legati alla valutazione degli integrali sul contorno. Il rilevante numero di termini coinvolti negli integrandi, soprattutto in presenza di funzioni di forma di ordine elevato, spinge all'uso di tecniche di integrazione numerica. Tali tecniche risultano però onerose nel caso di problemi di grandi dimensioni e scarsamente accurate in presenza di quasi singolarità. L'integrazione analitica ritenuta utile per il calcolo dei contributi singolari [4], per la riduzione del tempo di calcolo e per il miglioramento dell'accuratezza, è generalmente poco utilizzata a causa degli inconvenienti legati ai pesanti sviluppi simbolici, presenti soprattutto nel caso più articolato di domini genericamente orientati.

Una consistente riduzione delle manipolazioni simboliche, richieste dalle integrazioni sul contorno, può conseguirsi introducendo una descrizione a variabili complesse, in grado di fornire risultati analitici compatti per domini di integrazione sia separati che sovrapposti [5]. Seguendo questa descrizione le funzioni di forma e le soluzioni fondamentali si rappresentano mediante variabili complesse che descrivono la distanza tra il punto di campo ed il punto sorgente. Introducendo una specifica regola di integrazione nel piano complesso, gli integrali possono essere sviluppati analiticamente. In questo processo diventa essenziale l'adozione di una tecnica di regolarizzazione per parti che consente l'eliminazione dei contributi singolari. La regolarizzazione preliminare dei nuclei produce, inoltre, una significativa riduzione degli integrali base da valutare nella costruzione dei coefficienti del sistema.

2 MODELLO SIMMETRICO AD ELEMENTI DI CONTORNO

La costruzione di un modello simmetrico ad elementi di contorno per l'analisi di lastre inflesse sottili, di rigidezza D e soggette ad un carico p , si può basare su una formulazione integrale sul contorno derivata applicando il teorema di Betti

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g}^T \mathbf{f} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

allo stato reale \mathbf{f} e ad uno ausiliario \mathbf{g} definiti dai vettori

$$\mathbf{f} = \{ w[\xi] \quad \theta[\xi] \quad t[\xi] \quad m[\xi] \quad w^{(j)} \quad R^{(j)} \}^T, \quad j = 1..n_c \quad (2)$$

$$\mathbf{g} = \{ \hat{t}[\xi] \quad \hat{m}[\xi] \quad -\hat{w}[\xi] \quad -\hat{\theta}[\xi] \quad \hat{R}^{(j)} \quad -\hat{w}^{(j)} \}^T, \quad j = 1..n_c \quad (3)$$

dove n_c è il numero di spigoli presenti nel contorno Γ che delimita il dominio Ω della lastra [3].

Sostituendo nell'equazione (1) le rappresentazioni integrali sul contorno dello spostamento trasversale w e della rotazione normale θ

$$\begin{aligned} c f^{(i)} + \int_{\Gamma} (t_s^* w + m_s^* \theta) d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_c} R_s^{*(j)} w^{(j)} &= \\ = \int_{\Gamma} (t w_s^* + m \theta_s^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_c} R^{(j)} w_s^{*(j)} + \int_{\Omega} p w_s^* d\Omega & \quad s \in (F, C) \end{aligned} \quad (4)$$

e le analoghe equazioni integrali sul contorno del momento flettente m , del taglio equivalente t e della reazione di spigolo $R^{(j)} = m_t^{(j+)} - m_t^{(j-)}$

$$\begin{aligned} c f^{(i)} + \int_{\Gamma} (t w_s^* + m \theta_s^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_c} R^{(j)} w_s^{*(j)} &= \\ = \int_{\Gamma} (t_s^* w + m_s^* \theta) d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_c} R_s^{*(j)} w^{(j)} - \int_{\Omega} p w_s^* d\Omega & \quad s \in (\Delta\theta, \Delta w, \Delta\theta_t) \end{aligned} \quad (5)$$

si perviene alla relazione

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g}^T[\xi] \int_{\Gamma} \mathbf{K}^*[\xi, x] \mathbf{f}[x] d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} = - \int_{\Gamma} \mathbf{g}^T[\xi] \int_{\Omega} \mathbf{w}^*[\xi, x] p[x] d\Omega d\Gamma_x \quad (6)$$

dove \mathbf{K}^* è la matrice che raccoglie le soluzioni fondamentali $k^* \in (w_s^*, \theta_s^*, m_s^*, t_s^*, R_s^{*(j)})$ nel punto di campo x relative alle sorgenti $s \in (F, C, \Delta\theta, \Delta w, \Delta\theta_t)$ applicate nel punto ξ . Tali soluzioni presentano singolarità comprese tra $O(\ln r)$ e $O(1/r^4)$.

L'interpolazione alla Galerkin dei campi di contorno reali, attraverso le funzioni $\psi[x]$, e dei campi di contorno ausiliari, attraverso le funzioni $\psi[\xi]$, fornisce la seguente espressione discreta

$$\bar{\mathbf{g}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{g}}^T \mathbf{p} \quad \text{dove} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(n \times n)} & \mathbf{C}_{(n \times n_c)} \\ \mathbf{D}_{(n_c \times n)} & \mathbf{E}_{(n_c \times n_c)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}_{(n \times 1)} \\ \mathbf{m}_{(n_c \times 1)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

nella quale i vettori $\bar{\mathbf{f}}$ e $\bar{\mathbf{g}}$ raccolgono gli n parametri di interpolazione e gli n_c parametri di spigolo mentre le partizioni di \mathbf{K} e \mathbf{p} contengono i seguenti tipi di integrali

$$\mathbf{B} : \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \psi[\xi] k^*[\xi, x] \psi[x] d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \quad \mathbf{C} : \int_{\Gamma} \psi[\xi] k^*[\xi, x^j] d\Gamma_{\xi} \quad \mathbf{D} : \int_{\Gamma} \psi[x] k^*[\xi^i, x] d\Gamma_x \quad (8)$$

$$\mathbf{E} : k^*[\xi^i, x^j] \quad \boldsymbol{\ell} : \int_{\Gamma} \int_{\Omega} p[x] k^*[\xi, x] d\Omega d\Gamma_{\xi} \quad \mathbf{m} : \int_{\Omega} p[x] k^*[\xi^i, x] d\Omega \quad (9)$$

Dall'equazione (7) si estrae, sulla base delle condizioni al contorno, il sistema simmetrico $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nelle variabili di contorno incognite.

Nella valutazione degli integrali semplici e doppi sul contorno, presenti nelle matrici \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , si pongono due differenti problemi computazionali. Il primo riguarda il consistente numero di termini da integrare conseguente all'uso di funzioni di forma di ordine elevato. Le tecniche di integrazione numerica, facilmente implementabili ma onerose nell'analisi di problemi di grosse dimensioni e scarsamente accurate in situazioni di quasi singolarità, non risentono di questo problema. Al contrario, il ricorso all'integrazione analitica permette di ridurre i tempi di calcolo e di migliorare l'accuratezza dei risultati numerici, ma richiede pesanti calcoli simbolici qualora le integrazioni richieste siano effettuate utilizzando la descrizione standard a variabili reali, soprattutto nel caso di domini genericamente orientati. Il secondo problema è quello dell'integrazione di soluzioni fondamentali che diventano singolari quando i domini si sovrappongono. Esso si affronta generalmente adottando specifiche tecniche di integrazione analitiche basate su trasformazioni alla Gauss, sul concetto di parte finita di Hadamard o su processi al limite [4].

Una consistente semplificazione delle operazioni simboliche richieste dall'integrazione analitica può ottenersi introducendo una descrizione a variabili complesse [4], in grado di fornire sviluppi analitici più compatti per domini sia separati che sovrapposti, anche genericamente orientati.

3 DESCRIZIONE MEDIANTE VARIABILI COMPLESSE

La costruzione di un modello ad elementi di contorno in termini di variabili complesse richiede la rappresentazione in tale forma delle soluzioni fondamentali e delle funzioni di interpolazione coinvolte nelle equazioni integrali discrete (7).

3.1 Soluzioni fondamentali in forma complessa

Le forme complesse delle soluzioni fondamentali si possono ottenere con una trasformazione di variabili dal piano reale a quello complesso. Assunto un riferimento cartesiano globale, si sostituiscono le componenti reali (n_1, n_2) e (ν_1, ν_2) dei versori normali n e ν , relativi ai tratti di contorno Γ_x e Γ_{ξ} , e le coordinate reali (x_1, x_2) del punto di campo e (ξ_1, ξ_2) del punto sorgente, appartenenti ai medesimi tratti (vedi Figura 1), con le seguenti variabili complesse

$$\begin{aligned} n &= n_1 + i n_2 & x[\ell] &= x_1 + i x_2 \\ \nu &= \nu_1 + i \nu_2 & \xi[\lambda] &= \xi_1 + i \xi_2 \end{aligned} \quad (10)$$

dove ℓ e λ sono le ascisse locali sui tratti di contorno Γ_x e Γ_{ξ} .

La differenza tra le variabili complesse di posizione $x[\ell]$ e $\xi[\lambda]$ e l'analoga differenza tra le variabili coniugate $\bar{x}[\ell]$ e $\bar{\xi}[\lambda]$ definiscono le due nuove variabili complesse z e \bar{z}

$$z[\ell, \lambda] = x[\ell] - \xi[\lambda] = (x_1 - \xi_1) + i(x_2 - \xi_2) \quad (11)$$

$$\bar{z}[\ell, \lambda] = \bar{x}[\ell] - \bar{\xi}[\lambda] = (x_1 - \xi_1) - i(x_2 - \xi_2) \quad (12)$$

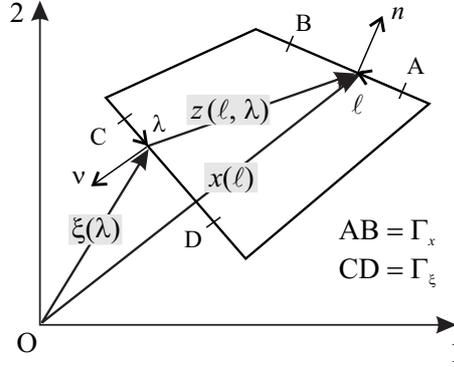


Figura 1: Piano complesso.

Utilizzando le relazioni (10), (11) e (12), le componenti dei vettori normali n e ν , la distanza r tra il punto di campo ed il punto sorgente e le sue derivate r_1 e r_2 , presenti nelle espressioni delle derivate direzionali r_n, r_t, r_ν e r_τ possono essere espresse come segue

$$m_1 = \frac{n + \bar{n}}{2}, \quad m_2 = \frac{n - \bar{n}}{2i}, \quad m \in \{n, \nu\} \quad (13)$$

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad r_1 = \frac{z + \bar{z}}{2|z|}, \quad r_2 = \frac{z - \bar{z}}{2i|z|} \quad (14)$$

pervenendo ad una espressione in forma complessa notevolmente più compatta di quella reale. Nel caso della soluzione fondamentale $t_{\Delta w}^*$ si passa, ad esempio, dalla forma reale

$$t_{\Delta w}^* = \frac{D}{2\pi r^4} \left\{ 3(-1 + \mu)(r_n r_\nu^3 (-2 + (-5 + 3\mu)r_n^2 + (13 - 7\mu)r_t^2) + r_\nu^2 r_t (6 + (27 - 21\mu)r_n^2 + (-7 + 5\mu)r_t^2) r_\tau - r_n r_\nu (-6 + (-5 + 7\mu)r_n^2 + 3(3 - 5\mu)r_t^2) r_\tau^2 - r_t (2 - (1 + 5\mu)r_n^2 + (1 + \mu)r_t^2) r_\tau^3) \right\} \quad (15)$$

alla seguente espressione complessa

$$t_{\Delta w}^* = \frac{D}{16\pi} 2\Re \left\{ - (6k_2 k_3 (n^3 \nu + n \nu^3)) \frac{1}{z^4} - \left(\frac{24k_2^2}{n^3 \nu^3} \right) \frac{z}{\bar{z}^5} \right\} \quad (16)$$

nella quale $k_1 = 1 + \mu, k_2 = -1 + \mu, k_3 = -5 + \mu$ e $\mu =$ coefficiente di Poisson. Relazioni altrettanto compatte si ottengono per le tutte le altre soluzioni fondamentali coinvolte nella formulazione simmetrica sul contorno.

3.2 Funzioni di interpolazione in forma complessa

La rappresentazione complessa delle funzioni di interpolazione $\psi[x]$ e $\psi[\xi]$, solitamente definite mediante le ascisse locali ℓ e λ , richiede l'introduzione di una trasformazione tra tali variabili e quelle complesse z e \bar{z} . Invertendo ed integrando le equazioni

$$\begin{aligned} dz[\ell, \lambda] &= (dx[\ell]/d\ell) d\ell - (d\xi[\lambda]/d\lambda) d\lambda \\ d\bar{z}[\ell, \lambda] &= (d\bar{x}[\ell]/d\ell) d\ell - (d\bar{\xi}[\lambda]/d\lambda) d\lambda \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} n & -\nu \\ -\bar{n} & \bar{\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ell \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (17)$$

ottenute dalla differenziazione delle relazioni (11) e (12), si perviene alla seguente trasformazione di variabili

$$\begin{aligned} \ell &= i a (b + 2\Re(\bar{\nu}z)) \\ \lambda &= i a (c + 2\Re(\bar{n}z)) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} a &= 1/(\nu\bar{n} - n\bar{\nu}) \\ b &= 2(\Im(\nu)h_2 - \Re(\nu)h_1) \\ c &= 2(\Im(n)h_2 - \Re(n)h_1) \end{aligned} \quad (18)$$

In tali espressioni $h_1 = x_1^A - \xi_1^C$ e $h_2 = x_2^A - \xi_2^C$ indicano la componente orizzontale e quella verticale della distanza tra i punti iniziali A e C dei tratti di contorno Γ_x e Γ_ξ (vedi Figura 1).

4 INTEGRAZIONE ANALITICA NEL PIANO COMPLESSO

La descrizione nel piano complesso delle soluzioni fondamentali $k^*[\ell, \lambda]$ e delle funzioni di forma $\psi^{(h)}[\lambda]$ e $\psi^{(k)}[\ell]$, associate ai parametri (h) e (k) delle interpolazioni utilizzate per i campi di contorno, consente di riscrivere sia gli integrandi, coinvolti nella valutazione dei coefficienti delle matrici \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , che i termini della matrice \mathbf{E} mediante una sommatoria di funzioni complesse e complesse coniugate. Riferendosi, ad esempio, alla matrice \mathbf{B} il generico integrale doppio

$$B^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda} \int_{\Gamma_\ell} \psi^{(h)}[\lambda] k^*[\ell, \lambda] \psi^{(k)}[\ell] d\ell d\lambda \quad (19)$$

viene sostituito dall'integrale in forma complessa

$$B^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda} \int_{\Gamma_\ell} \psi^{(h)}[z, \bar{z}] k^*[z, \bar{z}] \psi^{(k)}[z, \bar{z}] d\ell d\lambda = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_\lambda} \int_{\Gamma_\ell} 2\Re\{g_i[z, \bar{z}]\} d\ell d\lambda \quad (20)$$

dove l'integrando può essere rappresentato attraverso la combinazione di prodotti tra potenze di z e funzioni di \bar{z}

$$g_i[z, \bar{z}] = c_i z^p h[\bar{z}] \quad (21)$$

In tale relazione il numero m di termini, il coefficiente c_i e l'esponente p dipendono dal tipo di soluzione fondamentale coinvolta e dalle funzioni di forma utilizzate per descrivere i campi di contorno. Nella relazione (20) le quantità $d\ell$ e $d\lambda$ sono sostituite dalle quantità dz/in e $-dz/iv$ ricavate dall'espressione (17).

L'integrazione della generica funzione complessa $g_i[z, \bar{z}]$ è sviluppata attraverso una specifica regola di integrazione che permette di trasformare l'integrando bidimensionale in una forma monodimensionale. Tale regola, basata su ripetute integrazioni per parti rispetto alla variabile complessa z , assume la forma

$$\int_{\Gamma} z^p h[\bar{z}] d\Gamma = \sum_{j=0}^p \beta_j \frac{d^j}{dz^j} (z^p) \int_{j+1} h[\bar{z}] d\bar{z}^{j+1} \quad (22)$$

dove $d^0(z^p)/dz^0 = z^p$, $\beta_j = in^{2j+1}$ per $\Gamma = \Gamma_\ell$ e $\beta_j = -iv^{2j+1}$ per Γ_λ . Il simbolo $j+1$, situato al di sotto dell'operatore di integrazione della relazione (22), indica il numero di integrazioni indefinite della funzione $h[\bar{z}]$.

A titolo d'esempio si riportano di seguito due tipici risultati del processo di integrazione semplice, rispetto alla variabile ℓ , e doppia, rispetto alle variabili ℓ e λ .

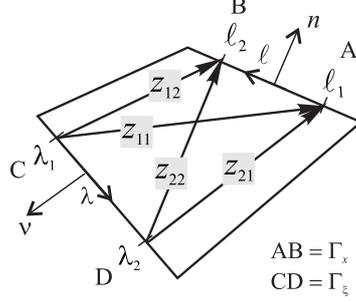


Figura 2: Estremi di integrazione nel piano complesso.

$$\int_{\Gamma_\ell} z \bar{z} \ln(\bar{z}) d\ell = \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \bar{z} \right) z \bar{z}^2 \right] (i n) + \left[\left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{6} \ln \bar{z} \right) \bar{z}^3 \right] (i n^3) \quad (23)$$

$$\int_{\Gamma_\lambda} \int_{\Gamma_\ell} z \bar{z} \ln(\bar{z}) d\ell d\lambda = \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{36} \ln \bar{z} \right) z \bar{z}^3 \right] (n\nu) + \left[\left(-\frac{13}{288} + \frac{1}{24} \ln \bar{z} \right) \bar{z}^4 \right] (n^3\nu + n\nu^3) \quad (24)$$

Calcolate le primitive di tutte le funzioni g_i coinvolte nel calcolo di un generico coefficiente della matrice B , l'effettiva disposizione dei domini di integrazione, con estremi ℓ_1, ℓ_2 e λ_1, λ_2 , fornisce l'integrale definito

$$B^{(hk)} = B^{(hk)}[z_{11}, \bar{z}_{11}] - B^{(hk)}[z_{12}, \bar{z}_{12}] - B^{(hk)}[z_{21}, \bar{z}_{21}] + B^{(hk)}[z_{22}, \bar{z}_{22}] \quad (25)$$

dove le quantità $z_{11} = z(\ell_1, \lambda_1)$, $z_{12} = z(\ell_1, \lambda_2)$, $z_{21} = z(\ell_2, \lambda_1)$ e $z_{22} = z(\ell_2, \lambda_2)$, che denotano le distanze nel piano complesso tra gli estremi dei domini di integrazione Γ_ℓ e Γ_λ , risultano pari a

$$z_{11} = (x_1^A - \xi_1^C) + i(x_2^A - \xi_2^C) \quad (26)$$

$$z_{12} = (x_1^A - \xi_1^D) + i(x_2^A - \xi_2^D) \quad (27)$$

$$z_{21} = (x_1^B - \xi_1^C) + i(x_2^B - \xi_2^C) \quad (28)$$

$$z_{22} = (x_1^B - \xi_1^D) + i(x_2^B - \xi_2^D) \quad (29)$$

Si osserva che la trasformazione di variabili definita dalle relazioni (18) contiene una singolarità che si attiva nel caso di domini allineati ($n = \nu$) o paralleli ($n = -\nu$). In questi casi, l'applicazione della regola (22) deve essere preceduta da un procedimento di passaggio al limite. A tal fine si disallineano inizialmente i vettori normali n e ν assumendo $n = \nu + \varepsilon$ nel caso di elementi allineati e $n = -(\nu + \varepsilon)$ nel caso di elementi paralleli. Successivamente, si ripristina la corretta orientazione dei domini di integrazione effettuando l'operazione di passaggio al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$.

5 REGOLARIZZAZIONE DEI NUCLEI SINGOLARI

Quando l'ordine di singolarità delle soluzioni fondamentali coinvolte supera $O(1/r)$, nel caso di integrazioni doppie, e $O(\ln r)$, nel caso di integrazioni semplici, il calcolo degli integrali richiede

una regolarizzazione preventiva dei nuclei mediante trasformazioni di Gauss. Ciascuna di tali trasformazioni viene effettuata su un supporto formato da due elementi di contorno contigui, assicurando la continuità delle funzioni di forma coinvolte ed eventualmente delle loro derivate nel punto di connessione tra gli elementi. Questa caratteristica, insieme all'annullamento delle stesse funzioni agli estremi del supporto, consente di eliminare i contributi di contorno singolari, prodotti dai successivi sviluppi per parti, conservando i contributi di dominio regolarizzati.

E' da notare che è necessario scegliere opportunamente l'ordine delle variabili rispetto a cui sviluppare l'integrazione per parti affinché i contributi singolari relativi al punto di connessione tra gli elementi del supporto si elidano a vicenda, . In questo modo, nel caso di coefficienti costituiti da soli integrali doppi si può eliminare la dipendenza della primitiva dal versore normale dell'elemento rendendo identici i contributi di contorno.

La procedura di regolarizzazione consente una significativa riduzione dei tipi di integrali da valutare. La riduzione dell'ordine di singolarità delle soluzioni fondamentali è accompagnata, infatti, da un contemporaneo abbassamento dell'ordine delle funzioni di interpolazione coinvolte. Tale risultato semplifica le espressioni degli integrandi in forma complessa compensando la maggiore articolazione delle funzioni di forma ottenute attraverso le trasformazioni di variabili (18).

Ricordando che il prodotto tra le soluzioni fondamentali e le funzioni di forma si può rappresentare mediante una sommatoria di funzioni complesse g_i e complesse coniugate \bar{g}_i , si riporta un quadro di tutte le funzioni $h[\bar{z}]$ da considerare per la valutazione dei coefficienti del sistema simmetrico nelle variabili di contorno

$$h_1[\bar{z}] = \bar{z} \quad , \quad h_2[\bar{z}] = \bar{z}^2 \quad , \quad h_3[\bar{z}] = 1/\bar{z} \quad , \quad h_4[\bar{z}] = 1/\bar{z}^2 \quad (30)$$

$$h_5[\bar{z}] = \ln \bar{z} \quad , \quad h_6[\bar{z}] = \bar{z} \ln \bar{z} \quad , \quad h_7[\bar{z}] = \bar{z}^2 \ln \bar{z} \quad , \quad h_8[\bar{z}] = \bar{z}^3 \ln \bar{z} \quad (31)$$

ed un elenco degli integrali doppi corrispondenti all'esponente $p = 2$

$$J_1 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \, d\ell d\lambda = \left(\frac{z^3}{6} \right) (\bar{n}\bar{\nu})$$

$$J_2 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \ln z \, d\ell d\lambda = \left(-\frac{5z^3}{36} + \frac{z^3 \ln z}{6} \right) (\bar{n}\bar{\nu})$$

$$J_3 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \bar{z} \, d\ell d\lambda = \left(\frac{\bar{z}^4}{24} \right) (n^3\nu + n\nu^3) + \left(\frac{z\bar{z}^3}{6} \right) (n\nu)$$

$$J_4 = \int_{\lambda} \int_{\ell} \frac{z}{\bar{z}} \, d\ell d\lambda = \left(\frac{\bar{z}^2 \ln \bar{z}}{2} - \frac{3\bar{z}^2}{4} \right) (n^3\nu + n\nu^3) + (z\bar{z} \ln \bar{z} - z\bar{z}) (n\nu)$$

$$J_5 = \int_{\lambda} \int_{\ell} \frac{z}{\bar{z}^2} \, d\ell d\lambda = (\bar{z} - z \ln \bar{z}) (n^3\nu + n\nu^3) - (z \ln \bar{z}) (n\nu)$$

$$J_6 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \ln \bar{z} \, d\ell d\lambda = \left(\frac{\bar{z}^3 \ln \bar{z}}{6} - \frac{11\bar{z}^3}{36} \right) (n^3\nu + n\nu^3) + \left(\frac{z\bar{z}^2 \ln \bar{z}}{2} - \frac{3z\bar{z}^2}{4} \right) (n\nu)$$

$$J_7 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \bar{z} \ln \bar{z} \, d\ell d\lambda = \left(\frac{\bar{z}^4 \ln \bar{z}}{24} - \frac{13\bar{z}^4}{288} \right) (n^3\nu + n\nu^3) + \left(\frac{z\bar{z}^3 \ln \bar{z}}{6} - \frac{5z\bar{z}^3}{36} \right) (n\nu)$$

$$J_8 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \bar{z}^2 \ln \bar{z} \, d\ell d\lambda = \left(-\frac{47\bar{z}^5}{3600} + \frac{\bar{z}^5 \ln \bar{z}}{60} \right) (n^3\nu + n\nu^3) + \left(-\frac{7z}{144} + \frac{z \ln \bar{z}}{12} \right) (n\nu)$$

$$J_9 = \int_{\lambda} \int_{\ell} z \bar{z}^3 \ln \bar{z} \, d\ell d\lambda = \left(-\frac{37\bar{z}^6}{7200} + \frac{\bar{z}^6 \ln \bar{z}}{120} \right) (n^3\nu + n\nu^3) + \left(-\frac{9z}{400} + \frac{z \ln \bar{z}}{20} \right) (n\nu)$$

6 ALCUNI ESEMPI DI REGOLARIZZAZIONE

Nel seguito si illustra l'applicazione del processo di regolarizzazione al calcolo del coefficiente $A^{(hk)} = A[\Delta\theta^{(h)}, u^{(k)}]$ associato ai parametri di interpolazione $\Delta\theta^{(h)}$ della sorgente ed $u^{(k)}$ dell'effetto, situati in due nodi contigui (vedi Figura 3). Il coefficiente in questione è definito dalla relazione

$$A^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi_\theta^{(h)}[\lambda] \int_{\Gamma_\ell^{(k)}} \psi_u^{(k)}[\ell] t_{\Delta\theta}^* d\Gamma_\ell^{(k)} d\Gamma_\lambda^{(h)} + \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi_\theta^{(h)}[\lambda] R_{\Delta\theta}^{*(k)} d\Gamma_\lambda^{(h)} \quad (32)$$

che comprende le soluzioni fondamentali $t_{\Delta\theta}^*$ con singolarità $O(1/r^3)$ e $m_{t_{\Delta\theta}}^*$ con singolarità $O(1/r^2)$

$$t_{\Delta\theta}^* = 2 \Re \underbrace{\left[\frac{n^3}{z^3} \right]}_{t_1} (4c_1 k_1 k_2) + 2 \Re \underbrace{\left[\left(\frac{1}{n^3 \nu^2} \right) \frac{z}{\bar{z}^4} \right]}_{t_2} (6c_1 k_2^2) + 2 \Re \underbrace{\left[\frac{n \nu^2}{z^3} \right]}_{t_3} (2c_1 k_2 k_3) \quad (33)$$

$$m_{t_{\Delta\theta}}^* = 2 \Re \underbrace{\left[-i \frac{n^2}{z^2} \right]}_{m_{t_1}} (2c_1 k_1 k_2) + 2 \Re \underbrace{\left[i \left(\frac{1}{n^2 \nu^2} \right) \frac{z}{\bar{z}^3} \right]}_{m_{t_2}} (2c_1 k_2^2) \quad (34)$$

dove $k_1 = (1 + \mu)$, $k_2 = (-1 + \mu)$, $k_3 = (-5 + \mu)$. Il trattamento congiunto dei termini con indice uguale, che presentano forme riconducibili a struttura simile attraverso una trasformazione per parti, permette di rimuovere i contributi di contorno che non è possibile eliminare avvalendosi delle proprietà delle sole funzioni di forma.

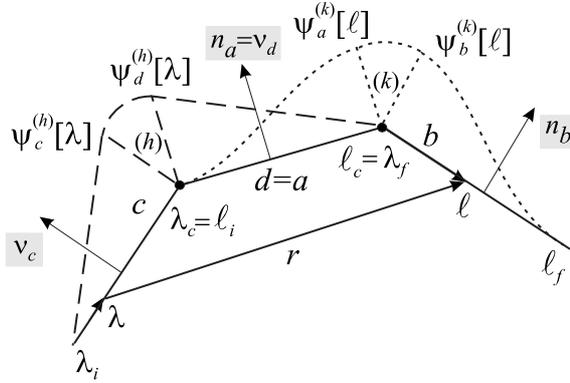


Figura 3: Funzioni di forma per il calcolo del coefficiente $A^{(hk)}$ relativo ai parametri $\Delta\theta^{(h)}$ e $u^{(k)}$.

Si consideri dapprima l'integrazione dei contributi t_1 e m_{t_1}

$$A_1^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} \int_{\Gamma_\ell^{(k)}} \psi^{(k)} t_1[n] d\ell d\lambda + \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} \left(m_{t_1}^{(k+)}[n_b] - m_{t_1}^{(k-)}[n_a] \right) d\lambda \quad (35)$$

Lo sviluppo per parti dell'integrale interno del nucleo t_1 sugli elementi a e b del supporto $\Gamma_\ell^{(k)}$ della funzione di forma $\psi^{(k)}$ produce, in tal caso, le relazioni

$$\int_{\ell_i}^{\ell_c} \psi_a^{(k)} t_1[n_a] d\ell = \underbrace{\left[\psi_a^{(k)} t_1^\ell[n_a] \right]_{\ell_i}^{\ell_c}}_{B_1} - \underbrace{\int_{\ell_i}^{\ell_c} \frac{d\psi_a^{(k)}}{d\ell} t_1^\ell[n_a] d\ell}_{B_3} \quad (36)$$

$$\int_{\ell_c}^{\ell_f} \psi_b^{(k)} t_1[n_b] d\ell = \underbrace{\left[\psi_b^{(k)} t_1^\ell[n_b] \right]_{\ell_c}^{\ell_f}}_{B_2} - \underbrace{\int_{\ell_c}^{\ell_f} \frac{d\psi_b^{(k)}}{d\ell} t_1^\ell[n_b] d\ell}_{B_4} \quad (37)$$

contenenti la primitiva

$$t_1^\ell[n] = \int t_1[n] d\ell = 2 \Re \left[i \frac{n^2}{2z^2} \right] (4c_1 k_1 k_2) \quad n \in (n_a, n_b) \quad (38)$$

uguale al nucleo m_{t_1} . Il valore nullo assunto dalle funzioni di forma agli estremi (ℓ_i, ℓ_f) del supporto $\Gamma^{(k)}$ consente la rimozione diretta delle parti di B_1 e B_2 che si riferiscono a tali punti. Per effetto del valore unitario assunto dalle stesse funzioni di forma nel punto di connessione (ℓ_c) degli elementi del supporto $\Gamma^{(k)}$, le aliquote di B_1 e B_2 possono essere invece eliminate solo sommandole ai termini $m_{t_1}^{(k-)}[n_a]$ e $m_{t_1}^{(k+)}[n_b]$, dotati di uguale valore ma di segno opposto. Al termine della prima integrazione per parti la relazione (35) diventa

$$A_1^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} (B_3 + B_4) d\lambda = - \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} \int_{\Gamma_\ell^{(k)}} \frac{d\psi^{(k)}}{d\ell} t_1^\ell[n] d\ell d\lambda \quad (39)$$

La singolarità $O(1/r^2)$ della primitiva t_1^ℓ presente in tale espressione può essere rimossa effettuando una nuova integrazione per parti sul supporto interno, di cui si riportano qui gli sviluppi analitici

$$\int_{\ell_i}^{\ell_c} \frac{d\psi_a^{(k)}}{d\ell} t_1^\ell[n_a] d\ell = - \underbrace{\left[\frac{d\psi_a^{(k)}}{d\ell} t_1^{\ell\ell}[n_a] \right]_{\ell_i}^{\ell_c}}_{C_1} + \underbrace{\int_{\ell_i}^{\ell_c} \frac{d^2\psi_a^{(k)}}{d\ell^2} t_1^{\ell\ell}[n_a] d\ell}_{C_3} \quad (40)$$

$$\int_{\ell_c}^{\ell_f} \frac{d\psi_b^{(k)}}{d\ell} t_1^\ell[n_b] d\ell = - \underbrace{\left[\frac{d\psi_b^{(k)}}{d\ell} t_1^{\ell\ell}[n_b] \right]_{\ell_c}^{\ell_f}}_{C_2} + \underbrace{\int_{\ell_c}^{\ell_f} \frac{d^2\psi_b^{(k)}}{d\ell^2} t_1^{\ell\ell}[n_b] d\ell}_{C_4} \quad (41)$$

contenenti la primitiva

$$t_1^{\ell\ell} = \int t_1^\ell d\ell = 2 \Re \left[-\frac{n}{2z} \right] (4c_1 k_1 k_2) \quad n \in (n_a, n_b) \quad (42)$$

L'annullamento delle derivate delle funzioni di forma sia agli estremi degli (ℓ_i, ℓ_c) dell'elemento di contorno a che a quelli (ℓ_c, ℓ_f) dell'elemento b consente la rimozione dei contributi di contorno C_1 e C_2 . Al termine della seconda integrazione per parti l'equazione (39) assume la forma seguente

$$A_1^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} (C_3 + C_4) d\lambda = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} \int_{\Gamma_\lambda^{(k)}} \frac{d^2\psi^{(k)}}{d\ell^2} t_1^{\ell\ell} d\ell d\lambda$$

La regolarizzazione del nucleo t_2 si svolge in modo analogo tenendo conto della presenza del termine m_{t_2} . Diverso è il caso del nucleo t_3 per il quale i contributi di contorno prodotti dalla due integrazione per parti su $\Gamma_\ell^{(k)}$ si elidono a vicenda o per effetto dei valori nulli delle funzioni di forma o delle loro derivate. Al termine dell'intero processo di regolarizzazione il coefficiente $A^{(hk)}$ può essere riscritto nella forma seguente

$$A_{reg.}^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi^{(h)} \int_{\Gamma_\lambda^{(k)}} \frac{d^2 \psi^{(k)}}{d\ell^2} (t_1^{\ell\ell} + t_2^{\ell\ell} + t_3^{\ell\ell}) d\ell d\lambda \quad (43)$$

contenente le primitive

$$t_1^{\ell\ell} = 2 \Re \left[-\frac{n}{2z} \right] (4c_1 k_1 k_2) \quad , \quad t_2^{\ell\ell} = 2 \Re \left[-\frac{\nu^2}{2nz} \right] (2c_1 k_2 k_3) \quad (44)$$

$$t_3^{\ell\ell} = 2 \Re \left[-\frac{1}{6n\nu^2 \bar{z}} \right] (4c_1 k_1 k_2) \quad (45)$$

Il risultato finale del processo di regolarizzazione è nettamente più compatto dell'espressione di partenza, sia per la presenza di funzioni di interpolazione entrambe lineari che per la maggiore compattezza delle espressioni dei nuclei regolarizzati rispetto ai nuclei originari. L'integrazione nel piano complesso dei vari termini si effettua applicando la regola di integrazione (22) dopo aver rappresentato le funzioni di forma in termini delle variabili z e \bar{z} .

Un procedimento di regolarizzazione del tutto simile a quello appena descritto può essere seguito nel calcolo del coefficiente della matrice \mathbf{A} , associato ai parametri $\Delta u^{(h)}$ di interpolazione della sorgente ed $u^{(k)}$ di interpolazione dell'effetto. L'espressione di partenza di tale coefficiente comprende in tal caso integrali doppi, integrali semplici e contributi puntuali

$$A^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi_u^{(h)}[\lambda] \int_{\Gamma_\ell^{(k)}} \psi_u^{(k)}[\ell] t_{\Delta w}^* d\Gamma_\ell^{(k)} d\Gamma_\lambda^{(h)} + \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \psi_u^{(h)}[\lambda] R_{\Delta w}^* d\Gamma_\lambda^{(h)} + \int_{\Gamma_\ell^{(k)}} \psi_u^{(k)}[\ell] t_{\Delta \theta_t}^* d\Gamma_\ell^{(k)} + R_{\Delta \theta_t}^* \quad (46)$$

di quattro differenti soluzioni fondamentali dotate di singolarità dotate pari a $O(1/r^4)$ per $t_{\Delta w}^*$, $O(1/r^3)$ per $m_{t_{\Delta w}}^*$ e $t_{\Delta \theta_t}^*$ e $O(1/r^2)$ per $m_{t_{\Delta \theta_t}}^*$

$$t_{\Delta w}^* = \underbrace{-2 \Re \left[\frac{n^3 \nu}{z^4} \right] (6c_1 k_2 k_3)}_{t_1} \underbrace{-2 \Re \left[\frac{n\nu^3}{z^4} \right] (6c_1 k_2 k_3)}_{t_2} \underbrace{-2 \Re \left[\left(\frac{1}{n^3 \nu^3} \right) \frac{z}{\bar{z}^5} \right] (24c_1 k_2^2)}_{t_3} \quad (47)$$

$$m_{t_{\Delta w}}^* = \underbrace{-2 \Re \left[\frac{n^2 \nu}{z^3} \right] (2i c_1 k_2 k_3)}_{m_{t_1}} \underbrace{+2 \Re \left[\left(\frac{1}{n^2 \nu^3} \right) \frac{z}{\bar{z}^4} \right] (6i c_1 k_2^2)}_{m_{t_3}} \quad (48)$$

$$t_{\Delta \theta_t}^* = \underbrace{+2 \Re \left[\frac{n\nu^2}{z^3} \right] (2i c_1 k_2 k_3)}_{tt_2} \underbrace{-2 \Re \left[\left(\frac{1}{n^3 \nu^2} \right) \frac{z}{\bar{z}^4} \right] (6i c_1 k_2^2)}_{tt_3} \quad (49)$$

$$m_{t_{\Delta \theta_t}}^* = \underbrace{-2 \Re \left[\left(\frac{1}{n^2 \nu^2} \right) \frac{z}{\bar{z}^3} \right] (2c_1 k_2^2)}_{mm_{t_3}} \quad (50)$$

Il trattamento congiunto dei termini dotati di uguale indice conduce al seguente risultato finale

$$A_{reg.}^{(hk)} = \int_{\Gamma_\lambda^{(h)}} \frac{d^2\psi^{(h)}[\lambda]}{d\lambda^2} \int_{\Gamma_\ell^{(k)}} \frac{d^2\psi^{(k)}[\ell]}{d\ell^2} (t_1^{\ell\ell\lambda\lambda} + t_2^{\ell\ell\lambda\lambda} + t_3^{\ell\ell\lambda\lambda}) d\ell d\lambda \quad (51)$$

nel quale la singolarità $O(1/r)$ della primitiva

$$\begin{aligned} t^{\ell\ell\lambda\lambda} = & 2 \Re \left[\left(\frac{n^2}{6\nu} + \frac{\nu^2}{6n} \right) \ln(z) \right] (6c_1 k_2 k_3) + \\ & + 2 \Re \left[\left(\frac{1}{48\nu^2} \right) \frac{z}{\bar{z}} + \left(\frac{1}{48} - \frac{n^2}{16\nu^2} \right) \ln(z) \right] (24c_1 k_2) \end{aligned} \quad (52)$$

non pone problemi per il calcolo dell'integrale doppio.

7 CONCLUSIONI

La valutazione analitica degli integrali di contorno che intervengono nella costruzione dei modelli BEM simmetrici pone impegnativi problemi computazionali, particolarmente nell'analisi di lastre inflesse sottili di generica forma poligonale. L'elevata singolarità delle soluzioni fondamentali ed il rilevante numero di termini conseguenti all'uso di funzioni di forma di ordine elevato richiedono, infatti, complicate manipolazioni simboliche. Consistenti semplificazioni si possono ottenere adottando una tecnica di integrazione a variabili complesse affiancata da una procedura di regolarizzazione basata su ripetute trasformazioni di Gauss. Si ottengono in tal modo espressioni simboliche molto compatte, anche nel caso di domini di integrazione genericamente orientati. Il lavoro descrive le procedure necessarie per l'applicazione della tecnica di integrazione analitica proposta, presentando un quadro dei tipi di integrali base necessari per la costruzione dei coefficienti integrali del sistema algebrico. Vengono anche messi in luce i vantaggi del processo di regolarizzazione che, oltre a consentire il trattamento delle singolarità, produce forme computazionalmente più convenienti.

Riferimenti bibliografici

- [1] Sirtori, S., Maier, G., Novati, G., Miccoli, S., "A Galerkin symmetric boundary-element method in elasticity: formulation and implementation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **35**, 255–282, (1992).
- [2] Frangi, A., Bonnet, M., "A Galerkin symmetric and direct BIE method for Kirchhoff elastic plates: formulation and implementation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **41**, 337–369, (1998).
- [3] Leonetti, L., Mazza, M. and Aristodemo, M., "A symmetric boundary element model for the analysis of Kirchhoff plates", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **33**, 1–11 (2009)
- [4] Mazza, M., Leonetti, L., Aristodemo, M., "Analytical integration of singular kernels in symmetric boundary element analysis of Kirchhoff plates", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **76**, 127–155 (2008).
- [5] Mazza, M., Aristodemo, M., "A complex variables technique for evaluating double integrals in a symmetric BEM", *Seventh International Conference on Computational Structures Technology*, Lisbon, Portugal, (2004).