

# Comportamento a grandi deformazioni di alcuni materiali iperelastici

Moreno Paciaroni

*Dipartimento di Architettura Costruzioni e Strutture, Università Politecnica delle Marche, Italy*

*E-mail: moreno.paciaroni@libero.it*

*Keywords:* legami costitutivi elastici non lineari, estensione semplice, tensioni residue.

SOMMARIO. Nel presente lavoro si applica la deformazione omogenea (azioni di volume nulle) di estensione semplice a tre materiali iperelastici non lineari omogenei ed isotropi. In particolare si analizzano i materiali neo-hookeano e di Mooney-Rivlin incomprimibili e neo-hookeano policonvesso. Ci si pone il duplice scopo di valutare il comportamento a grandi deformazioni e caratterizzare i vari parametri costitutivi in relazione alle costanti elastiche di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  della teoria lineare.

## 1 INTRODUZIONE

Il comportamento costitutivo dei materiali iperelastici è definito dall'espressione dell'energia di deformazione  $\psi$  che, nel caso isotropo e nell'ipotesi di oggettività materiale, è funzione degli invarianti ortogonali del tensore sinistro di deformazione di Cauchy-Green  $\underline{B}$ :

$$\begin{aligned}i_1 &= \text{tr} \underline{B} \\i_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \underline{B})^2 - \text{tr}(\underline{B}^2) \right] \\i_3 &= \det \underline{B}\end{aligned}$$

con  $i_3 = 1$  per materiale incomprimibile. Come dimostrato in [1], il tensore degli sforzi di Cauchy è fornito dall'espressione:

$$\underline{T}(\underline{B}) = \beta_0 \underline{I} + \beta_1 \underline{B} + \beta_{-1} \underline{B}^{-1}$$

Indicando con  $\psi_{,j}$  la derivata di  $\psi$  rispetto al  $j$ -esimo invariante, le funzioni che definiscono lo stato di sforzo sono espresse da:

$$\begin{aligned}\beta_0^{(i)} &= -p \\ \beta_1^{(i)} &= 2\psi_{,1} \\ \beta_{-1}^{(i)} &= -2\psi_{,2}\end{aligned}$$

per materiale incomprimibile, con  $p$  costante arbitraria determinabile attraverso le equazioni di equilibrio, e:

$$\begin{aligned}\beta_0^{(c)} &= \frac{2}{\sqrt{i_3}} (i_2 \psi_{,2} + i_3 \psi_{,3}) \\ \beta_1^{(c)} &= \frac{2}{\sqrt{i_3}} \psi_{,1} \\ \beta_{-1}^{(c)} &= -2\sqrt{i_3} \psi_{,2}\end{aligned}$$

per materiale comprimibile.

Per studiare il comportamento a grandi deformazioni, si sceglie di applicare l'estensione semplice perché, oltre ad essere facilmente gestibile dal punto di vista analitico, risalta gli aspetti non lineari dei legami costitutivi ed è la prova più semplice da realizzare in laboratorio. Il gradiente di deformazione  $\underline{F}$  è rappresentato dal tensore:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{bmatrix}$$

in cui  $\Lambda_3$  è lo stiramento longitudinale, ovvero il rapporto tra la lunghezza corrente e quella di riferimento, e  $\Lambda$  la contrazione laterale. Il tensore  $\underline{B}$  e il suo inverso hanno componenti:

$$\begin{aligned} [\underline{B}]_{ii} &= [F]_{ii}^2 \\ [\underline{B}^{-1}]_{ii} &= [F]_{ii}^{-2} \end{aligned}$$

lungo la diagonale principale e nulle al di fuori di essa.

La forma del legame costitutivo lineare utilizzata come termine di confronto, espressa in funzione del tensore di deformazione infinitesima  $\underline{E}$ , è:

$$\underline{T}^{(i)}(\underline{E}) = -p\underline{I} + 2\mu\underline{E} \quad (1)$$

$$\underline{T}^{(c)}(\underline{E}) = \lambda(\text{tr}\underline{E})\underline{I} + 2\mu\underline{E} \quad (2)$$

con  $\lambda$  e  $\mu$  parametri costitutivi determinabili con le prove descritte in [2]. Applicando un'estensione semplice, l'unica componente di tensione attiva diventa:

$$T_{33}^{(i)} = 3\mu(\Lambda_3 - 1) \quad (3)$$

$$T_{33}^{(c)} = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (\Lambda_3 - 1) \quad (4)$$

I moduli di Young e di Poisson (moduli tecnici) hanno valori:

$$E^{(i)} = 3\mu \quad \nu^{(i)} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$E^{(c)} = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \nu^{(c)} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6)$$

## 2 MATERIALE NEO-HOOKEANO INCOMPRESSIBILE

L'energia di deformazione è lineare nel primo invariante ([2]):

$$\psi(i_1, i_2) = ai_1$$

con  $a > 0$ , per cui il tensore degli sforzi è definito da:

$$\underline{T}(\underline{B}) = -p\underline{I} + 2a\underline{B}$$

La linearizzazione dell'espressione precedente fornisce:

$$\underline{T}(\underline{E}) = -p\underline{I} + 2a\underline{I} + 4a\underline{E} + \underline{O}(\|\underline{E}\|^2)$$

Data l'arbitrarietà di  $p$ , è lecito inglobare lo sforzo residuo  $2a\underline{I}$  all'interno dello sforzo reattivo. Dal confronto con la (1), è immediata l'attribuzione del valore:

$$a = \frac{\mu}{2}$$

L'applicazione della deformazione di estensione semplice produce il sistema:

$$\begin{cases} \Lambda^2 \Lambda_3 = 1 \\ T_{\alpha\alpha} = -p + 2a\Lambda^2 = 0 \\ T_{33} = -p + 2a\Lambda_3^2 = \sigma \end{cases} \quad \alpha = 1, 2$$

la cui soluzione definisce il seguente legame costitutivo adimensionale:

$$\sigma_{ad} = \frac{T_{33}}{2a} = \Lambda_3^2 - \Lambda_3^{-1} \quad (7)$$

L'espressione (7) è plottata in Figura 1.

È da notare che sviluppando in serie di Taylor l'equazione di vincolo e la tensione  $T_{33}$  nell'intorno di  $\Lambda_3 = 1$  si ottengono risultanti consistenti con (5) e (3):

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda_3^{-\frac{1}{2}} &\approx 1 - \frac{1}{2}(\Lambda_3 - 1) &\implies & \nu = -\frac{\Lambda - 1}{\Lambda_3 - 1} = \frac{1}{2} \\ T_{33} = 2a(\Lambda_3^2 - \Lambda_3^{-1}) &\approx 2a[3(\Lambda_3 - 1)] &\implies & E = 6a \end{aligned}$$

### 3 MATERIALE DI MOONEY-RIVLIN INCOMPRIMIBILE

L'energia di deformazione è lineare nei primi due invarianti ([2]):

$$\psi(i_1, i_2) = ai_1 + bi_2$$

con  $a, b > 0$ , per cui il tensore degli sforzi in elasticità finita e in quella lineare è dato da:

$$\begin{aligned} \underline{T}(\underline{B}) &= -p\underline{I} + 2a\underline{B} - 2b\underline{B}^{-1} \\ \underline{T}(\underline{E}) &= -p\underline{I} + (2a - 2b)\underline{I} + (4a + 4b)\underline{E} + \underline{O}(\|\underline{E}\|^2) \end{aligned}$$

Con lo stesso modo di procedere del §2, si ingloba lo sforzo residuo in quello reattivo e si identifica:

$$a + b = \frac{\mu}{2}$$

Avendo a disposizione una sola relazione, non è possibile ricavare distintamente il valore dei moduli  $a$  e  $b$ .

Il sistema di equazioni fornito dall'applicazione della deformazione è:

$$\begin{cases} \Lambda^2 \Lambda_3 = 1 \\ T_{\alpha\alpha} = -p + 2a\Lambda^2 - 2b\Lambda^{-2} = 0 \\ T_{33} = -p + 2a\Lambda_3^2 - 2b\Lambda_3^{-2} = \sigma \end{cases} \quad \alpha = 1, 2$$

che, risolto per  $\Lambda_3$ , definisce il legame costitutivo adimensionale:

$$\sigma_{ad} = \frac{T_{33}}{2a + 2b} = \frac{1}{1 + m} [(\Lambda_3^2 - \Lambda_3^{-1}) + m(\Lambda_3 - \Lambda_3^{-2})] \quad (8)$$

in cui  $m = b/a$ . L'andamento della funzione (8) è riportato in Figura 1.

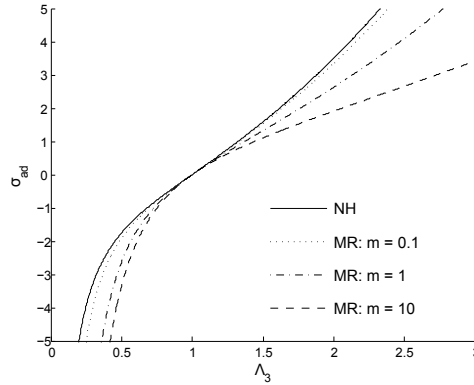


Figura 1: Legge costitutivo per materiali neo-hookeano e di Mooney-Rivlin incomprimibili.

Si può osservare che il materiale neo-hookeano è un caso particolare del materiale di Mooney-Rivlin con rapporto elastico  $m = 0$ . Inoltre si nota che all'aumentare di  $m$  aumenta la rigidità a compressione e diminuisce quella a trazione. Per assegnare valori numerici corretti ai parametri  $a$  e  $b$ , si può pensare di eseguire una prova di estensione a grandi deformazioni in cui si ricava il legame sforzo-deformazione sperimentale: a questo si sovrappone la curva teorica tarando il valore di  $m$ .

#### 4 MATERIALE NEO-HOOKEANO POLICONVESSO

Rispetto al caso considerato nel §2, entra in gioco la deformabilità volumetrica del materiale attraverso il determinante del tensore sinistro di deformazione di Cauchy-Green ([2]):

$$\psi(i_1, i_2, i_3) = ai_1 + ci_3 - d \ln \sqrt{i_3}$$

con  $a, c, d > 0$ . Come dimostrato in [3], l'energia di deformazione risulta convessa rispetto al gradiente di deformazione, al suo cofattore e al determinante. Il tensore degli sforzi è definito dalla relazione:

$$\underline{T}(\underline{B}) = \frac{2}{\sqrt{i_3}} \left[ \left( ci_3 - \frac{d}{2} \right) \underline{I} + a\underline{B} \right]$$

che linearizzata diventa:

$$\underline{T}(\underline{E}) = (2a + 2c - d)\underline{I} + (-2a + 2c + d)(tr \underline{E})\underline{I} + 4a\underline{E} + O(\|\underline{E}\|^2)$$

Dal confronto con la (2), si ricavano le relazioni:

$$\begin{aligned} -2a + 2c + d &= \lambda \\ a &= \frac{\mu}{2} \end{aligned}$$

Conoscendo i soli parametri  $\lambda$  e  $\mu$ , non è possibile esplicitare il valore dei tre moduli elastici  $a$ ,  $c$  e  $d$ . In più, rispetto ai casi precedenti, non si può trascurare l'influenza delle tensioni residue:

$$\begin{cases} T_{\alpha\alpha} = \frac{2a}{\Lambda_3} + 2c(\Lambda^2\Lambda_3) - \frac{d}{\Lambda^2\Lambda_3} = 2a + 2c - d \\ T_{33} = 2a\frac{\Lambda_3}{\Lambda^2} + 2c\Lambda^2\Lambda_3 - \frac{d}{\Lambda^2\Lambda_3} = (2a + 2c + d) + \sigma \end{cases} \quad (9)$$

Considerando le tensioni nette come la differenza tra le tensioni totali e quelle residue, la linearizzazione del sistema precedente dà come risultato:

$$\begin{cases} \hat{T}_{\alpha\alpha} = T_{\alpha\alpha} - \sigma_r = (-2a + 2c + d)(\Lambda_3 - 1) + (4c + 2d)(\Lambda - 1) = 0 \\ \hat{T}_{33} = T_{33} - \sigma_r = 2a\frac{-2a + 6c + 3d}{2c + d}(\Lambda_3 - 1) = \sigma \end{cases}$$

da cui derivano le seguenti ridefinizioni dei moduli tecnici consistenti con le (6):

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{-2a + 2c + d}{4c + 2d} \\ E &= 2a\frac{-2a + 6c + 3d}{2c + d} \end{aligned}$$

Il sistema (9) viene adimensionalizzato e lo studio è affrontato attraverso i rapporti  $\alpha = \lambda/\mu$  e  $n = c/d$  (strettamente positivi), oltre alla variabile di controllo  $\Lambda_3$ . I moduli elastici del materiale neo-hookeano assumono così la forma:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\mu \\ c &= \frac{1 + \alpha}{1 + 2n}n\mu \\ d &= \frac{1 + \alpha}{1 + 2n}\mu \end{aligned}$$

Ponendo  $\gamma = (4n + 2\alpha n - \alpha)$ , costante correlata alle tensioni residue, dalla (9)<sub>1</sub> si ottiene la descrizione analitica dello stiramento laterale:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\gamma\Lambda_3 - (1 + 2n) + \sqrt{(\gamma\Lambda_3 - (1 + 2n))^2 + 8n(1 + \alpha)^2\Lambda_3^2}}{4n(1 + \alpha)\Lambda_3^2}}$$

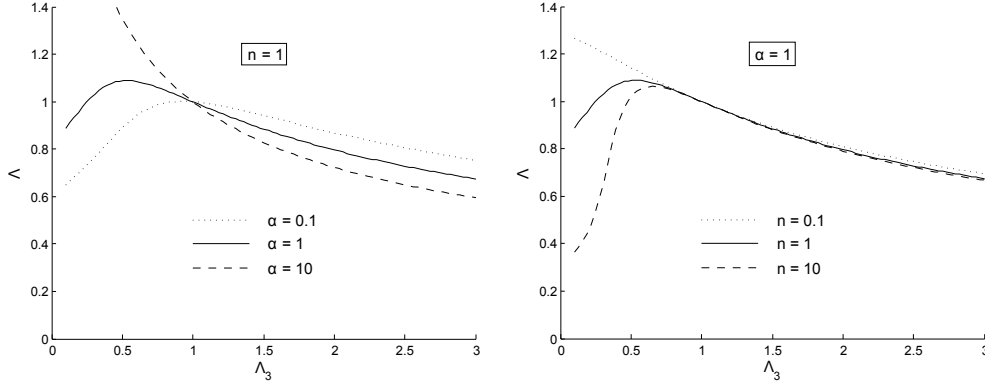


Figura 2: Stiramento laterale.

È semplice verificare che la radice del discriminante va presa con il solo segno positivo perché è l'unico valore che restituisce  $\Lambda = 1$  per  $\Lambda_3 = 1$  (assenza di deformazione). Dalla Figura 2, si osserva che la contrazione laterale non sempre è una funzione monotona di  $\Lambda_3$ . Lo studio della derivata prima permette di calcolare il dominio per cui  $\Lambda$  risulta crescente:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \Lambda_3} \geq 0 \quad \implies \quad \Lambda_3 \leq q = \frac{2\gamma(1+2n)}{\gamma^2 + 8n}$$

Per valori di  $q$  negativi o nulli, essendo  $\Lambda_3$  una grandezza strettamente positiva, lo stiramento laterale risulta una funzione monotona decrescente. Questo comportamento dipende dai rapporti elastici, ed in particolare si ottiene nel dominio:

$$\begin{cases} n < \frac{1}{2} \\ \alpha \geq \frac{4n}{1-2n} \end{cases}$$

Il parametro  $q$  ammette un estremo superiore:

$$\sup q = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2\gamma(1+2n)}{\gamma^2 + 8n} = 1$$

Ciò indica che il comportamento non monotono può verificarsi solo per accorciamenti del materiale, mentre in trazione, benché non lineare, l'andamento risulta quello convenzionale.

**Osservazione 1.** L'influenza della tensione residua è notevole, infatti proprio questo parametro governa la monotonia di  $\Lambda$ : per  $\sigma_r \leq 0$ , lo stiramento è una funzione monotona decrescente.

Lo studio del modulo di Poisson non lineare evidenzia che questo può assumere valori negativi anche per  $\lambda > 0$ , contrariamente a quanto accade in elasticità lineare: questo significa che il materiale sottoposto a compressione manifesta una contrazione anziché una dilatazione. L'analisi della

positività di  $\nu_{nl}$  fornisce:

$$\nu_{nl} = -\frac{\Lambda - 1}{\Lambda_3 - 1} \leq 0 \quad \implies \quad \Lambda_3 \leq r = \frac{2n - \alpha}{2n(1 + \alpha)}$$

Il limite superiore del parametro  $r$  è:

$$\sup r = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2n - \alpha}{2n(1 + \alpha)} = 1$$

quindi, come per la contrazione laterale, comportamenti di questo tipo vanno ricercati solo per nel ramo di compressione. Valori sempre positivi di  $\nu_{nl}$  si riscontrano invece all'interno del dominio:

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ n \leq \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

**Osservazione 2.** È possibile dimostrare che  $q > r$  per ogni  $(\alpha, n)$ , per cui anche la positività di  $\nu_{nl}$  è influenzata dalle tensioni residue: in particolare se queste ultime sono negative o nulle, il modulo di Poisson non lineare è sempre positivo.

La tensione adimensionale ricavabile dalla seconda equazione del sistema (9) è definita dalla funzione:

$$\sigma_{ad} = \frac{\hat{T}_{33}}{2a} = \frac{\Lambda_3}{\Lambda^2(\Lambda_3)} - \frac{1}{\Lambda_3} \quad (10)$$

Vista la presenza di  $\Lambda^2$ , la (10) continuerà a dipendere dai rapporti elastici  $\alpha$  e  $n$ : come per il materiale incomprimibile di Mooney-Rivlin, in linea di principio è possibile determinare il corretto valore dei rapporti elastici sovrapponendo il legame teorico a quello sperimentale ottenuto con una prova di estensione semplice eseguita in laboratorio. La Figura 3 evidenzia che:

- al variare di  $\alpha$ , la tensione adimensionale aumenta notevolmente in trazione e in  $\Lambda_3 = 1$  vi è un punto di intersezione;
- al variare di  $n$ , la tensione adimensionale subisce piccole variazioni e in  $\Lambda_3 = 1$  vi è un punto di tangenza.

Uno studio più approfondito della tensione adimensionale in compressione mette in luce anche altri aspetti: al variare dei moduli elastici, la  $\sigma_{ad}$  può avere variazioni di concavità e comportamenti non monotoni. In questi casi, il materiale ricercherà configurazioni stabili di equilibrio come descritto in [4]. Si possono addirittura raggiungere situazioni in cui la tensione cambia segno: in particolare ciò avviene quando  $1 < \Lambda < \Lambda_3$ . Questo comportamento, fisicamente non plausibile, pone delle restrizioni sul valore dei rapporti elastici. I valori di  $\Lambda_3$  che restituiscono un valore nullo della tensione adimensionale sono forniti dalle radici della seguente equazione del sesto ordine:

$$2n(1 + \alpha)\Lambda_3^6 - \gamma\Lambda_3^3 + (1 + 2n)\Lambda_3^2 - (1 + \alpha) = 0 \quad (11)$$

Isolando l'unica radice esprimibile in forma chiusa si ottiene:

$$\left(2n(1 + \alpha)(\Lambda_3^5 + \Lambda_3^4 + \Lambda_3^3) - (2n - \alpha)\Lambda_3^2 + (1 + \alpha)(\Lambda_3 + 1)\right)(\Lambda_3 - 1) = 0$$

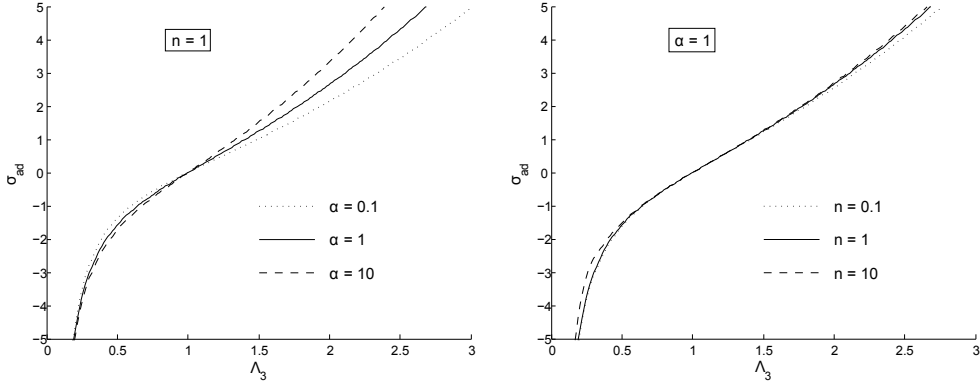


Figura 3: Legame costitutivo per materiale neo-hookeano policonvesso.

Nel caso in cui la tensione residua adimensionale fosse nulla, la fattorizzazione della (11) diventa:

$$\left(2n\Lambda_3^4 + 2n\Lambda_3^2 + 1\right)(\Lambda_3^2 - 1) = 0$$

per la quale quattro radici sono complesse, una reale positiva e una reale negativa: l'unica radice accettabile è pertanto  $\Lambda_3 = 1$ . Sempre nell'ipotesi che  $\sigma_r = 0$ , si riesce a dimostrare che la tensione è una funzione monotona crescente.

L'ultimo aspetto che si analizza è l'energia di deformazione, che riscritta in termini di  $\alpha$  e  $n$  diventa:

$$\psi_{ad} = \frac{\psi}{2a} = \frac{i_1}{2} + \frac{1 + \alpha}{1 + 2n} (ni_3 - \ln \sqrt{i_3}) \quad (12)$$

Riguardando l'energia come funzione dello stiramento longitudinale e dei parametri elastici, si può perdere la convessità, come illustrato in Figura 4. Considerando il caso particolare di tensioni residue nulle, si dimostra invece che l'energia risulta sempre convessa.

## 5 CONCLUSIONI

L'applicazione di deformazioni omogenee a materiali iperelastici non lineari ha messo in relazione i parametri costitutivi con le costanti di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ . Nel caso di materiale neo-hookeano incomprimibile, l'unica costante  $a$  è legata direttamente al modulo di elasticità tangenziale  $\mu$ , mentre negli altri due casi occorre una prova di laboratorio per tarare un appropriato rapporto elastico. La prova di estensione semplice risulta molto efficace a questo scopo ed è, inoltre, semplice da eseguire.

Il materiale neo-hookeano policonvesso ha evidenziato comportamenti inaspettati al variare dei due parametri di studio  $\alpha = \lambda/\mu$  e  $n = c/d$ . Rispetto alla variabile di controllo  $\Lambda_3$ :

- la contrazione laterale è una funzione non sempre monotona;



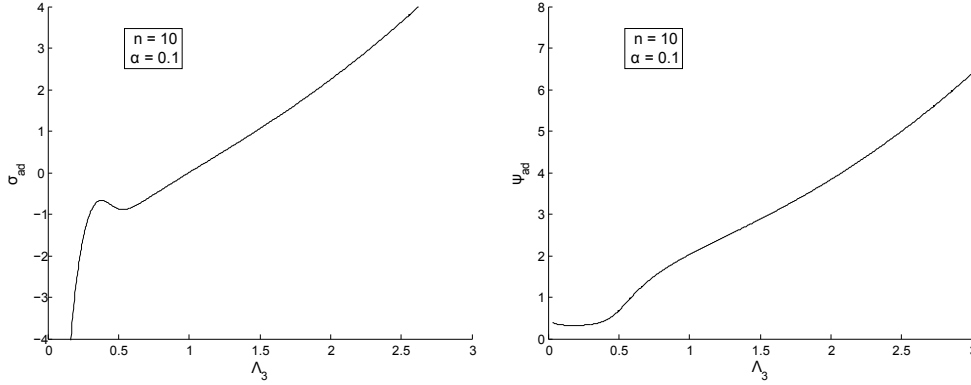


Figura 4: Tensione non monotona ed energia non convessa.

- il modulo di Poisson non lineare può assumere anche valori negativi;
- la tensione in compressione non è necessariamente monotona e può anche cambiare di segno, diventando positiva;
- l'energia, convessa rispetto agli invarianti principali, perde questa caratteristica per degli appropriati valori dei parametri elastici.

Per ottenere un comportamento fisicamente plausibile, perciò, non bastano le restrizioni  $a, c, d > 0$ , ma occorre integrarle con la condizione:

$$2n(1 + \alpha)\Lambda_3^6 - \gamma\Lambda_3^3 + (1 + 2n)\Lambda_3^2 - (1 + \alpha) \leq 0 \quad \forall \Lambda_3 \in (0, 1)$$

che plottata sul piano  $(\alpha, n)$  esclude il dominio tratteggiato in Figura 5. Il fatto che comportamenti anomali si abbiano per valori di  $n$  grandi e crescenti con  $\alpha$  è direttamente legato alla forma dell'energia (12). Considerando infatti la situazione limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_{ad} = \frac{i_1}{2} + \frac{i_3}{2}$$

si perde il termine che manda l'energia all'infinito per annichilimento del materiale. È ovvio che  $n$  debba avere un valore, per quanto grande, comunque finito: perciò nel caso di deformazione estrema di  $\Lambda_3 \rightarrow 0^+$ , l'energia tende ad essere infinita per effetto del termine logaritmico, ma per regimi intermedi possono verificarsi situazioni fisicamente non plausibili come quelle documentate.

Lo sforzo residuo condiziona fortemente il comportamento del materiale policonvesso: nel caso in cui questo si annulli, lo stiramento laterale e la tensione sono funzioni monotone, il modulo di Poisson è positivo e l'energia convessa. In questo caso, poi, avendo a disposizione un'ulteriore relazione, è possibile esplicitare il valore dei moduli elastici:

$$a = \frac{\mu}{2}$$

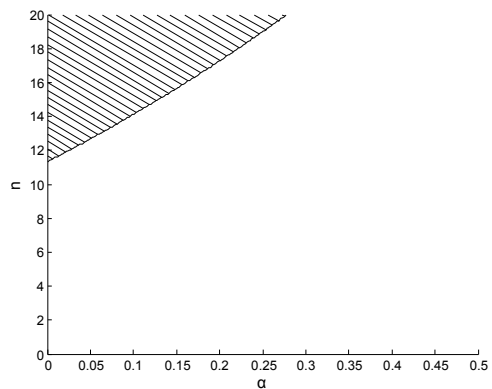


Figura 5: Restrizione del dominio dei rapporti elastici.

$$c = \frac{\lambda}{4}$$

$$d = \mu + \frac{\lambda}{2}$$

#### Riferimenti bibliografici

- [1] Atkin, R.J., and Fox, N., *An introduction to the Theory of Elasticity*, Longman London and New York, London (1980).
- [2] Ciarlet, P.G., *Mathematical Elasticity - volume I: three-dimensional elasticity*, North Holland, New York (1988).
- [3] Ciarlet P.G. and Geymonat G., “Sur le lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible,” *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, **295**, 423-426 (1982).
- [4] Ericksen J.L., “Equilibrium of bars,” *Journal of Elasticity*, **5**, 191-201 (1975).
- [5] Ericksen, J.L., *Introduction to the Thermodynamics of Solids*, Chapman and Hall, London (1991).