

# Serie di Fourier in sistemi di coordinate non ortogonali per l'omogeneizzazione dei compositi viscoelastici

Andrea Caporale, Raimondo Luciano

*Dipartimento di Meccanica, Strutture, Ambiente e Territorio,  
Università degli Studi di Cassino, Italia  
E-mail: a.caporale@unicas.it, luciano@unicas.it*

*Keywords:* Compositi periodici, omogeneizzazione, viscoelasticità.

**SUMMARY.** The Eshelby method and the Fourier series are used in order to determine the elastic and viscoelastic properties of composites with inclusions that are distributed periodically in a non-orthogonal coordinate system. Finally, the elastic and relaxation moduli provided by the proposed method are compared with the moduli obtained via FEM for a unidirectional composite.

**SOMMARIO.** Il metodo di Eshelby e le serie di Fourier sono utilizzati per determinare le proprietà elastiche e viscoelastiche di compositi con inclusioni che risultano distribuite in modo periodico in un sistema di riferimento non ortogonale. Infine, i moduli elastici e di rilassamento ottenuti col metodo proposto sono confrontati con quelli ottenuti via FEM per un composito unidirezionale.

## 1 INTRODUZIONE

Molti metodi sono stati proposti per valutare il comportamento globale dei compositi elastici lineari e non, e.g. il metodo “self-consistent”, di Mori-Tanaka e, nel caso di distribuzione periodica di eterogeneità, i metodi proposti da Nemat-Nasser [1]. Questi metodi utilizzano la tecnica dell'auto-deformazione equivalente, introdotta da Eshelby per i compositi elastici lineari [2]. Tale tecnica si basa sull'osservazione che un mezzo eterogeneo è equivalente ad un mezzo omogeneo soggetto ad un'opportuna auto-deformazione. Tale equivalenza è stata inizialmente utilizzata per l'omogeneizzazione di corpi rinforzati da una distribuzione diluita di eterogeneità [3]. Successivamente, essa è stata estesa al caso di distribuzioni non diluite e periodiche di eterogeneità, imponendo ad un mezzo omogeneo di riferimento un'opportuna auto-deformazione periodica [1]. In tal caso, espandendo in serie di Fourier la parte periodica della soluzione, è possibile determinare completamente la soluzione del problema dell'omogeneizzazione. Tale procedura è stata utilizzata per studiare molteplici aspetti del comportamento dei compositi periodici ortogonali [1,4], i.e. caratterizzati da  $\beta = 90^\circ$  in Figura 1.

In questo lavoro, il metodo brevemente descritto sopra è generalizzato al caso di compositi periodici obliqui, i.e. caratterizzati da  $\beta$  anche diverso da  $90^\circ$ . I periodici obliqui includono i compositi unidirezionali con simmetria esagonale (i.e. caratterizzati da  $\beta = 60^\circ$  e  $a'_2 = a'_3$  in Figura 1), che sono stati oggetto di numerosi lavori sul tema dell'omogeneizzazione [5,6,7].

Nel metodo proposto per l'omogeneizzazione dei periodici obliqui, le grandezze di interesse (spostamenti, deformazioni, ecc.) sono definite nel sistema di riferimento non ortogonale  $x'_1, x'_2, x'_3$ . In tale sistema, le grandezze considerate sono periodiche e quindi espandibili in serie di Fourier. Infine, i coefficienti dell'espansione in serie delle grandezze di interesse, in particolare gli spostamenti, sono determinati risolvendo le equazioni di Navier scritte nel dominio di Fourier.

È importante notare che per il composito periodico obliquo in Figura 1 è anche possibile definire una cella unitaria  $\bar{U}$  con i lati paralleli agli assi  $x_1, x_2, x_3$ , di dimensioni maggiori di quella ( $U'$ ) con i lati paralleli agli assi del sistema non ortogonale. Tale eventualità da un lato consente l'utilizzo della formulazione classica proposta da [1], definita nel sistema di riferimento ortogonale, dall'altro comporta un aumento delle incognite, vale a dire di auto-deformazioni equivalenti da utilizzare per risolvere il problema dell'omogeneizzazione.

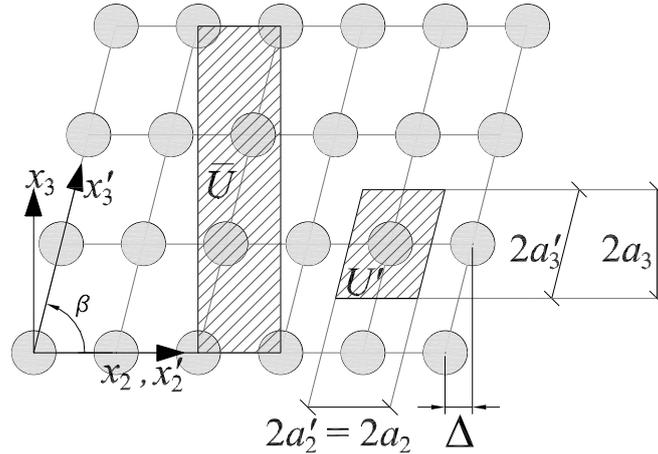


Figura 1: Sezione trasversale di un composito unidirezionale periodico obliquo. Gli assi  $x_1$  e  $x'_1$  sono coincidenti e perpendicolari al piano definito dagli assi  $x'_2$  e  $x'_3$ .

La formulazione proposta, di validità generale, è applicata al caso dei compositi unidirezionali con matrice viscoelastica. Il problema viscoelastico è risolto applicando il principio di corrispondenza, in precedenza utilizzato da [8,9] per i compositi periodici ortogonali. Secondo tale principio, le equazioni che governano il problema sono riscritte nel dominio di Laplace e le corrispondenti soluzioni sono anti-trasformate nel dominio del tempo. Infine, i risultati ottenuti col metodo proposto sono confrontati con quelli ottenuti via FEM [7], per verificarne l'accuratezza.

Nella Sezione 2, è riportata la formulazione per l'omogeneizzazione di compositi elastici lineari con inclusioni che risultano distribuite in modo periodico in un sistema di riferimento non ortogonale (compositi obliqui). Nella Sezione 3, il principio di corrispondenza è applicato alle equazioni ricavate nella Sezione 2 col fine di determinare i moduli di rilassamento di compositi periodici obliqui con matrice viscoelastica. Le Sezioni 2 e 3 terminano con degli esempi numerici, dove i moduli elastici e di rilassamento ottenuti col metodo proposto sono confrontati con quelli ottenuti via FEM per un composito unidirezionale.

## 2 ANALISI ELASTICA LINEARE

In Figura 1, sono definiti il sistema di coordinate Cartesiane  $x_1, x_2, x_3$  ed il sistema di coordinate oblique  $x'_1, x'_2, x'_3$ . I due sistemi hanno l'origine in comune. Il composito periodico obliquo può essere ottenuto dalla ripetizione lungo le tre direzioni coordinate  $x'_1, x'_2, x'_3$  di una cella unitaria  $U'$  con i lati paralleli agli assi del sistema obliquo e definita come

$$U' = \{-a'_i < x'_i < a'_i \ (i=1, 2, 3)\}.$$

Nelle analisi di omogeneizzazione, i campi di spostamento, deformazione e tensione presentano la stessa periodicità esibita dalla microstruttura del composito, i.e. detta  $\mathbf{h}$  una di tali variabili deve risultare

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}') = \mathbf{h}(\mathbf{x}' + \mathbf{d}'),$$

dove  $\mathbf{d}' = 2 m_i a'_i \mathbf{e}'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) con  $m_i$  numero intero arbitrario e  $\mathbf{e}'_i$  versore dell'asse coordinato  $x'_i$ . È definita la trasformazione  $\mathbf{Q}$ , che consente il passaggio tra i due sistemi di riferimento, i.e.  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{u}'$ , dove il vettore  $\mathbf{u}$  ha come elementi le componenti di spostamento nel sistema Cartesiano  $x_1, x_2, x_3$ . Quindi, il campo di spostamento  $\mathbf{u}'$  nel sistema di coordinate oblique può essere espanso in serie di Fourier:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}') = \sum_{\xi' \neq 0} F' \mathbf{u}'(\xi') \exp(i\mathbf{x}' \cdot \xi'), \quad (1)$$

dove

$$F' \mathbf{u}'(\xi') = \frac{1}{U'} \int_{U'} \mathbf{u}'(\mathbf{x}') \exp(-i\mathbf{x}' \cdot \xi') dV_{x'}, \quad U' = 8a'_1 a'_2 a'_3,$$

$$\xi'_i \equiv \frac{n_i \pi}{a'_i} \quad (n_i = 0, \pm 1, \dots; i \text{ non sommato}; i = 1, 2, 3).$$

Il prodotto scalare “ $\cdot$ ” è definito come la somma dei prodotti delle componenti omologhe anche nel sistema di coordinate oblique, i.e.  $\mathbf{x}' \cdot \xi' = x'_1 \xi'_1 + x'_2 \xi'_2 + x'_3 \xi'_3$ .

La deformazione infinitesima  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = 1/2(\nabla_x \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \nabla_x)$  è esprimibile in funzione di  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}')$  nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}') = 1/2(\mathbf{Q}^{-T} \cdot (\nabla_{x'} \otimes \mathbf{u}'(\mathbf{x}')) \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{u}'(\mathbf{x}') \otimes \nabla_{x'}) \cdot \mathbf{Q}^{-1}). \quad (2)$$

L'espansione in serie della parte periodica della deformazione è

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}') = \sum_{\xi' \neq 0} F' \boldsymbol{\varepsilon}(\xi') \exp(i\mathbf{x}' \cdot \xi'), \quad (3)$$

i cui coefficienti, tenendo conto della (2), sono esprimibili come:

$$F' \boldsymbol{\varepsilon}(\xi') = 1/2(\mathbf{Q}^{-T} \cdot (i\xi' \otimes F' \mathbf{u}'(\xi')) \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot (F' \mathbf{u}'(\xi') \otimes i\xi') \cdot \mathbf{Q}^{-1}), \quad \xi' \neq 0. \quad (4)$$

I coefficienti  $F' \mathbf{u}'(\xi')$  che compaiono nella (4) sono ricavati risolvendo il problema dell'omogeneizzazione col metodo di Eshelby, i.e. considerando un solido omogeneo soggetto ad un'opportuna autodeformazione  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}') = H(\mathbf{x}', \Omega) \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}')$ , dove  $\Omega$  è il volume dell'inclusione ed  $H$  è la funzione di Heaviside periodica. Tale autodeformazione deve rispettare la periodicità obliqua ed è quindi rappresentabile in modo analogo alla (1). Il campo  $\mathbf{u}$  deve soddisfare l'equazione di

equilibrio

$$\nabla_x \cdot \{ \mathbf{C} : (\nabla_x \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})) \} = \mathbf{0},$$

che, espansa in serie di Fourier nel sistema di coordinate oblique, fornisce i coefficienti della (1):

$$F' \mathbf{u}'(\boldsymbol{\xi}') = -i \{ \boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{Q}) \}^{-1} \otimes (\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1}) : \mathbf{C} : F' \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\xi}'), \quad \boldsymbol{\xi}' \neq \mathbf{0}. \quad (5)$$

Inserendo i coefficienti (5) nella (4) si ha:

$$F' \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}') = F' \mathbf{S}^p(\boldsymbol{\xi}') : F' \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\xi}'), \quad \boldsymbol{\xi}' \neq \mathbf{0}, \quad (6)$$

dove

$$F' \mathbf{S}^p(\boldsymbol{\xi}') = \text{sym} \left\{ (\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{Q}) \cdot \{ \boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{Q}) \}^{-1} \otimes (\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1}) \right\} : \mathbf{C}.$$

Una buona approssimazione al problema dell'omogeneizzazione si ottiene considerando un'autodeformazione costante, i.e.  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}', \Omega) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ . In questo caso e tenendo conto della (6), la deformazione media nell'inclusione è data da:

$$1/\Omega \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) dV_x = \mathbf{S}^p : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*,$$

dove

$$\mathbf{S}^p = \sum_{\boldsymbol{\xi}' \neq \mathbf{0}} f g(-\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1}) g(\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{Q}^{-1}) F' \mathbf{S}^p(\boldsymbol{\xi}'), \quad g(\boldsymbol{\xi}') = 1/\Omega \int_{\Omega} \exp(i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}') dV_x, \quad (7)$$

ed  $f$  è la frazione di volume delle inclusioni. Infine, il tensore elastico del composito si ottiene dalla seguente formula [1]:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} : \left\{ \mathbf{1}^{(4s)} - f \left\{ (\mathbf{C} - \mathbf{C}^{\Omega})^{-1} : \mathbf{C} - \mathbf{S}^p \right\}^{-1} \right\}, \quad (8)$$

dove  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{C}^{\Omega}$  sono i tensori elastici della matrice e dell'inclusione rispettivamente.

### 2.1 Formulazione alternativa

Una formulazione alternativa dell'omogeneizzazione elastica lineare dei compositi periodici obliqui si ha sviluppando il problema nel sistema di coordinate Cartesiane  $x_1, x_2, x_3$ . A tal fine, bisogna definire nel sistema Cartesiano una base di funzioni fra loro ortogonali e che rispettino la periodicità obliqua del composito. Tale base è fornita dalle funzioni  $\exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}^{-T} \cdot \boldsymbol{\xi}')$  ed è derivata dalla base nel sistema di assi obliqui, introdotta nella precedente sezione. Infatti, dalla relazione  $\mathbf{x}$

=  $\mathbf{Q}\mathbf{x}'$  si ha

$$\exp(i\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\xi}') = \exp(i\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}') = \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}^{-T} \cdot \boldsymbol{\xi}').$$

L'espansione in serie del campo di spostamenti nel sistema cartesiano è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}'' \neq \mathbf{0}} F\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}'') \exp(i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}''),$$

$$F\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}'') = \frac{1}{U} \int_U \mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}'') dV_x,$$

dove  $\boldsymbol{\xi}'' = \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\xi}'$  e  $U$  è il volume della cella unitaria nel sistema di coordinate ortogonali, i.e.  $U = 8 a_1 a_2 a_3 \sin \beta$  per la cella unitaria contenente una sola inclusione, indicata in Figura 1 con  $U'$ . Il problema così definito è formalmente simile a quello dei compositi periodici ortogonali e quindi tutta la relativa trattazione [1] può essere adattata ai compositi obliqui. Specificamente, il tensore elastico del composito è definito dalla (8) dove  $\mathbf{S}^P$  è dato da

$$\mathbf{S}^P = \sum_{\boldsymbol{\xi}'' \neq \mathbf{0}} f g(-\boldsymbol{\xi}'') g(\boldsymbol{\xi}'') F\mathbf{S}^P(\boldsymbol{\xi}''), \quad g(\boldsymbol{\xi}'') = 1/\Omega \int_{\Omega} \exp(i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}'') dV_x,$$

$$F\mathbf{S}^P(\boldsymbol{\xi}'') = \text{sym} \left\{ \boldsymbol{\xi}'' \otimes (\boldsymbol{\xi}'' \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\xi}'')^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi}'' \right\} : \mathbf{C}. \quad (9)$$

## 2.2 Esempi numerici

In questa sezione, sono calcolate numericamente le componenti del tensore elastico definito dalla (8) del composito unidirezionale con fibre cilindriche, illustrato in Figura 1. La matrice e la fibra sono considerate elastiche lineari, omogenee ed isotrope. Il modulo di Young ed il rapporto di Poisson della matrice polimerica sono  $E_m = 3.27$  GPa e  $\nu_m = 0.38$ , rispettivamente, mentre i moduli delle fibre di vetro sono  $E_f = 68.67$  GPa e  $\nu_f = 0.21$ . In Figura 2 sono rappresentati i moduli elastici  $\bar{C}_{ijkl}$  del composito caratterizzato da  $a_2 = a_3$  in funzione del rapporto  $\Delta / 2a_2$ . I moduli diagrammati in Figura 2 sono funzioni periodiche di periodo uno: i moduli  $\bar{C}_{2222}$ ,  $\bar{C}_{3333}$ , e  $\bar{C}_{3131}$  presentano i valori massimi in corrispondenza di  $\Delta / 2a_2 = n$ , con  $n$  numero intero, ed i valori minimi in corrispondenza di  $\Delta / 2a_2 = \frac{1}{2} + n$ ; il contrario accade per  $\bar{C}_{2233}$ ,  $\bar{C}_{1212}$  e  $\bar{C}_{2323}$ . Nel caso  $\Delta / 2a_2 = n$  risulta  $a'_2 = a'_3$ , la microstruttura del composito presenta simmetria quadrata ed i moduli globali soddisfano le relazioni  $\bar{C}_{2222} = \bar{C}_{3333}$ ,  $\bar{C}_{1122} = \bar{C}_{1133}$ ,  $\bar{C}_{3131} = \bar{C}_{1212}$ .

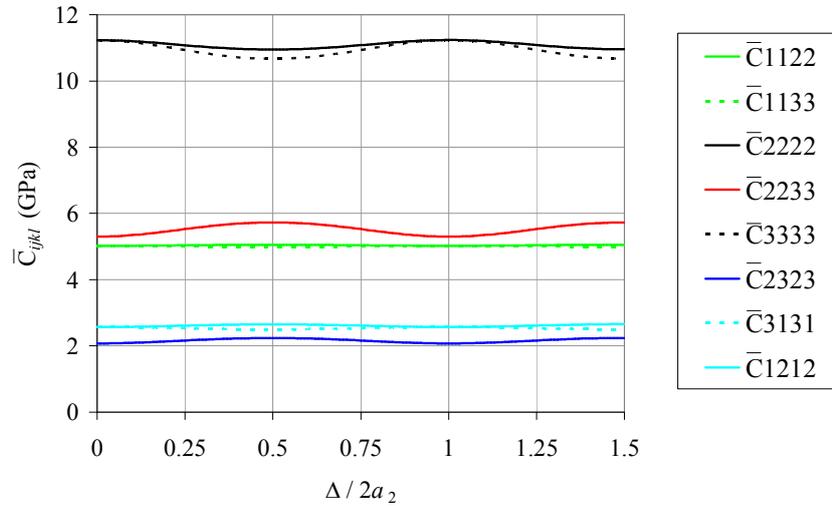


Figura 2: Moduli globali al variare dell'inclinazione dell'asse  $x'_3$  ( $a_2 = a_3, f = 0.4$ ).

In Figura 3 sono rappresentati i moduli elastici  $\bar{C}_{ijkl}$  del composito caratterizzato da  $a_3 = \sqrt{3} / 2 a_2$  in funzione del rapporto  $\Delta / 2a_2$ . I moduli diagrammati in Figura 3 sono funzioni periodiche di periodo uno: i moduli  $\bar{C}_{2222}$ ,  $\bar{C}_{3333}$ ,  $\bar{C}_{1133}$  e  $\bar{C}_{3131}$  presentano i valori massimi in corrispondenza di  $\Delta / 2a_2 = n$ , con  $n$  numero intero, ed i valori minimi in corrispondenza di  $\Delta / 2a_2 = \frac{1}{2} + n$ ; il contrario accade per  $\bar{C}_{2233}$ ,  $\bar{C}_{1122}$ ,  $\bar{C}_{1212}$  e  $\bar{C}_{2323}$ . Nel caso  $\Delta / 2a_2 = \frac{1}{2} + n$  risulta  $a'_2 = a'_3$ , la microstruttura del composito presenta simmetria esagonale ed i moduli globali corrispondono ad un materiale trasversalmente isotropo, i.e.  $\bar{C}_{2222} = \bar{C}_{3333}$ ,  $\bar{C}_{1122} = \bar{C}_{1133}$ ,  $\bar{C}_{3131} = \bar{C}_{1212}$  e  $\bar{C}_{2323} = \frac{1}{2} (\bar{C}_{2222} - \bar{C}_{2233})$ .

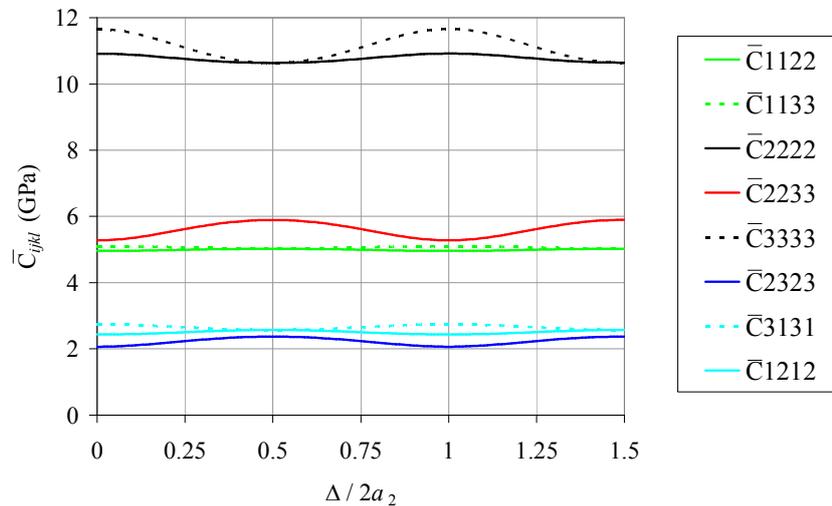


Figura 3: Moduli globali al variare dell'inclinazione dell'asse  $x'_3$  ( $a_3 = \sqrt{3} / 2 a_2, f = 0.4$ ).

Si nota che alcune curve  $\bar{C}_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl} (\Delta / 2a_2)$  hanno variazioni non trascurabili. In Figura 2, la massima variazione ( $\max(\bar{C}_{ijkl}) - \min(\bar{C}_{ijkl}) / \min(\bar{C}_{ijkl})$ ) è data dal modulo  $\bar{C}_{2233}$  ed è pari a 0.081. In Figura 3, la massima variazione è data dal modulo  $\bar{C}_{2323}$  ed è pari a 0.147. Variazioni maggiori si ottengono aumentando la frazione di volume delle fibre.

Le formule (7) e (9) forniscono lo stesso valore numerico del tensore  $\mathbf{S}^P$ , quindi i moduli globali  $\bar{C}_{ijkl}$  diagrammati nelle Figure 2 e 3 sono stati determinati ponendo nella (8) il valore di  $\mathbf{S}^P$  definito dalla (7) o, in modo equivalente, dalla (9).

### 3 ANALISI VISCOELASTICA

In questa sezione, sono determinati i moduli di rilassamento del composito obliquo con matrice isotropa viscoelastica ed inclusioni elastiche lineari. Applicando il metodo di Eshelby, il solido eterogeneo preso in considerazione può essere sostituito da un solido omogeneo con le proprietà viscoelastiche della matrice e su cui è imposta un'opportuna autodeformazione periodica. Il legame costitutivo del solido omogeneo è espresso nel dominio del tempo come

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{1}^{(2)} \int_0^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\tau, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau, \mathbf{x})) d\tau + 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\boldsymbol{\varepsilon}(\tau, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau, \mathbf{x})) d\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{C}(t-\tau) : \frac{\partial}{\partial \tau} (\boldsymbol{\varepsilon}(\tau, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau, \mathbf{x})) d\tau, \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove  $\lambda(t)$  e  $\mu(t)$  sono i moduli di rilassamento della matrice. Nel dominio di Laplace, la (3.1) diviene

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s, \mathbf{x}) &= \mathbf{1}^{(2)} s \tilde{\lambda}(s) \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s, \mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s, \mathbf{x})) + 2s \tilde{\mu}(s) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s, \mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s, \mathbf{x})) \\ &= s \tilde{\mathbf{C}}(s) : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s, \mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s, \mathbf{x})), \end{aligned} \quad (3.2)$$

da cui si nota che le equazioni che governano il problema dell'omogeneizzazione viscoelastica nel dominio di Laplace sono formalmente simili a quelle del problema elastico. Per tale motivo, il problema viscoelastico è impostato espandendo in serie di Fourier le grandezze d'interesse definite nel dominio di Laplace, si veda [8,9] per informazioni al riguardo. Specificamente, i coefficienti dell'espansione in serie della deformazione nel dominio di Laplace sono dati da

$$F\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s, \boldsymbol{\xi}''') = \text{sym} \left\{ \boldsymbol{\xi}'' \otimes (\boldsymbol{\xi}'' \cdot \tilde{\mathbf{C}}(s) \cdot \boldsymbol{\xi}''')^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi}'' \right\} : \tilde{\mathbf{C}}(s) : F\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s, \boldsymbol{\xi}''') = F\tilde{\mathbf{P}}(s, \boldsymbol{\xi}''') : \tilde{\mathbf{C}}(s) : F\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s, \boldsymbol{\xi}''').$$

Inoltre assumendo l'ipotesi di eigenstrain costante nell'inclusione, i.e.  $\boldsymbol{\varepsilon}^*(s, \mathbf{x}) = H(\mathbf{x}, \Omega) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s)$ , si ha:

$$1/\Omega \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(s, \mathbf{x}) dV_x = \sum_{\boldsymbol{\xi}'' \neq 0} f g(-\boldsymbol{\xi}''') g(\boldsymbol{\xi}''') F\tilde{\mathbf{P}}(s, \boldsymbol{\xi}''') : \tilde{\mathbf{C}}(s) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s) = \tilde{\mathbf{P}}(s) : \tilde{\mathbf{C}}(s) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s).$$

Come nel caso elastico lineare, anche qui è necessario imporre la condizione di consistenza seguente

$$\mathbf{C}^\Omega : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ(s) + \tilde{\mathbf{P}}(s) : \tilde{\mathbf{C}}(s) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s)) = s\tilde{\mathbf{C}}(s) : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ(s) + (\tilde{\mathbf{P}}(s) : \tilde{\mathbf{C}}(s) - \mathbf{1}^{(4s)}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(s)),$$

dalla quale si ottiene il valor medio dell'autodeformazione, che consente di definire il tensore di rilassamento del composito  $\tilde{\mathbf{C}}(s)$ :

$$\tilde{\mathbf{C}}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s) - f \left\{ s(\tilde{\mathbf{C}}(s) - \mathbf{C}^\Omega)^{-1} - \tilde{\mathbf{P}}(s) \right\}^{-1}. \quad (3.3)$$

L'anti-trasformata della (3.3) fornisce il tensore di rilassamento del composito nel dominio del tempo. I seguenti moduli di taglio globali nel dominio di Laplace si ottengono banalmente dalla (3.3):

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2323}(s) &= \tilde{\mu}(s) - f \left( \frac{s}{s\tilde{\mu}(s) - \mu_\Omega} - \frac{S_3 + S_2 - \frac{2S_{44}}{1-\nu_m}}{\tilde{\mu}(s)} \right)^{-1}, \\ \bar{C}_{3131}(s) &= \bar{C}_{1212}(s) = \tilde{\mu}(s) - \frac{f}{\frac{s}{s\tilde{\mu}(s) - \mu_\Omega} - \frac{S_3}{\tilde{\mu}(s)}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove  $\tilde{\mu}(s)$  è la trasformata di Laplace di  $\mu(t)$ ,  $\mu_\Omega = E_f / (2 + 2\nu_f)$  e le serie sono definite come

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{\xi'' \neq 0} f g(-\xi'') g(\xi'') \bar{\xi}_i''^2, \quad S_{44} = \sum_{\xi'' \neq 0} f g(-\xi'') g(\xi'') \bar{\xi}_2''^2 \bar{\xi}_3''^2, \\ \xi'' &= |\xi''| = \sqrt{\xi_i'' \xi_i''}, \quad \bar{\xi}_i'' = \xi'' / \xi'' \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

### 3.1 Esempio numerico

In questo esempio, è considerato un composito viscoelastico unidirezionale con simmetria esagonale (i.e.  $a_3 = \sqrt{3} / 2 a_2$  e  $\Delta / 2a_2 = 1/2 + \nu$ ). Le fibre sono elastiche lineari ed hanno le proprietà meccaniche definite nella sezione 2.2. La matrice polimerica è schematizzata con un modello di Maxwell connesso in serie con un modello di Voigt. La cedevolezza da creep della matrice è definita quindi da

$$C_{cr}(t) = \frac{1}{k_M} + \frac{t}{\eta_M} + \frac{1}{k_V} \left( 1 - e^{-\frac{k_V t}{\eta_V}} \right), \quad (3.4)$$

dove i quattro parametri del modello assumono i seguenti valori  $k_M = E_m$ ,  $\eta_M = 8000 \text{ GPa} \times \text{ora}$ ,  $k_V = 1.8 \text{ GPa}$ ,  $\eta_V = 300 \text{ GPa} \times \text{ora}$ . Dalla (3.4) si ottiene il seguente rilassamento del modulo di Young della matrice  $E_{r(i)}(t) = 1.125 e^{-0.0001429t} + 2.145 e^{-0.0171659t}$ , utilizzato per definire  $\lambda(t)$  e  $\mu(t)$ .

In Figura 4 sono diagrammati i moduli di rilassamento  $\bar{C}_{1122}$ ,  $\bar{C}_{3131}$  e  $\bar{C}_{2323}$  del composito e le curve fornite dal metodo proposto in questo articolo sono confrontate con quelle ottenute via

FEM [7].

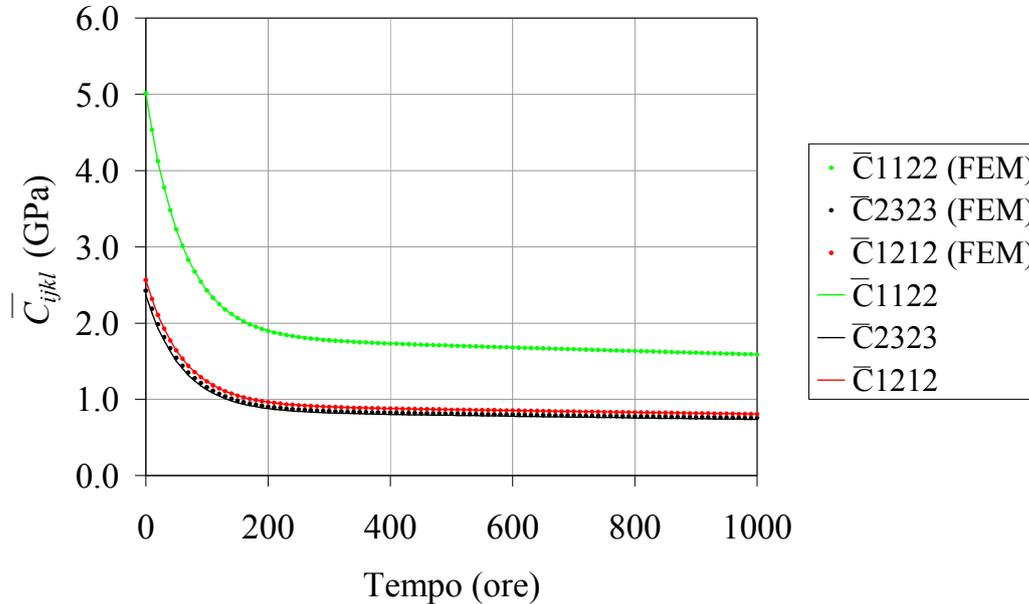


Figura 4: Rilassamento dei moduli di taglio del composito con simmetria esagonale ( $f=0.4$ ).

#### 4 CONCLUSIONI

Il metodo di Eshelby, utilizzato in [1,4] per determinare le proprietà meccaniche dei compositi periodici, è esteso in questo lavoro ai compositi periodici obliqui. Gli esempi della sezione 2 mostrano come la variazione dei moduli elastici globali sia non trascurabile al variare del rapporto  $\Delta / 2a_2$ , che definisce la microstruttura del composito obliquo. Infine, nella sezione 3 sono ricavati i moduli di rilassamento globali di un composito viscoelastico con simmetria esagonale utilizzando il principio di corrispondenza ed è mostrato come il confronto con i moduli forniti dal FEM sia positivo.

#### Bibliografia

- [1] Nemat-Nasser, S., Hori, M., *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, Elsevier, Amsterdam (1999).
- [2] Eshelby, J.D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **241**, 376-396 (1957).
- [3] Mura, T., *Micromechanics of defects in solids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1987).
- [4] Fotiu, P.A., Nemat-Nasser, S., Overall properties of elastic-viscoplastic periodic composites, *International Journal of Plasticity*, **12**, 163-190 (1996).
- [5] Achenbach, J.D., Zhu, H., Effect of interphases on micro and macromechanical behavior of hexagonal-array fiber composites, *Journal of Applied Mechanics*, **57**, 956-963 (1990).
- [6] Michel, J.C., Moulinec, H., Suquet, P., Effective properties of composite materials with

- periodic microstructure: a computational approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **172**, 109-143 (1999).
- [7] Caporale, A., Luciano, R., Sacco, E., Micromechanical analysis of interfacial debonding in unidirectional fiber-reinforced composites, *Computers and Structures*, **84**, 2200-2211 (2006).
  - [8] Luciano, R., Barbero, E.J., Analytical expressions for the relaxation moduli of linear viscoelastic composites with periodic microstructure, *Journal of Applied Mechanics*, **62**, 786-793 (1995).
  - [9] Barbero E.J., Luciano, R., Micromechanical formulas for the relaxation tensor of linear viscoelastic composites with transversely isotropic fibers, *International Journal of Solids and Structures*, **32**, 1859-1872 (1995).