

Sulla possibilità di ridurre le vibrazioni residue di dispositivi meccanici azionati da trasmissioni a cinghia

Giovanni Incerti

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale, Università di Brescia, Italy

E-mail: giovanni.incerti@ing.unibs.it

Keywords: Vibrazioni, Trasmissioni a cinghia, Pianificazione del moto.

SOMMARIO. La tecnica di pianificazione del moto descritta nell'articolo è stata sviluppata al fine di eliminare o di ridurre le vibrazioni residue di dispositivi meccanici azionati da trasmissioni a cinghia, mantenendo inalterati il tempo di azionamento e lo spostamento da compiere. L'approccio proposto si basa su una scelta opportuna della legge di moto assegnata al servomotore che aziona il dispositivo meccanico; tale legge viene definita tramite alcuni coefficienti numerici che determinano la forma dei profili di spostamento, velocità ed accelerazione. Mediante una tecnica di ottimizzazione questi coefficienti possono essere modificati senza alterare le condizioni di continuità imposte allo spostamento ed alle sue derivate temporali in corrispondenza degli istanti iniziale e finale. È importante sottolineare che questa tecnica può essere implementata con facilità su un dispositivo reale: infatti non è necessario utilizzare complessi algoritmi di controllo per il servomotore o trasduttori supplementari per misurare l'ampiezza delle vibrazioni, ma è sufficiente modificare la mappatura delle leggi di moto memorizzate nel controllore elettronico già utilizzato per il comando del motore.

1 INTRODUZIONE

In molte macchine industriali l'azionamento di dispositivi meccanici è ottenuto mediante trasmissioni a cinghia, che, come è noto consentono di ottenere soluzioni progettuali caratterizzate da una buona silenziosità di funzionamento, da alto rendimento, manutenzione ridotta, basso costo ed elevata affidabilità. Nel caso in cui sia indispensabile eliminare gli slittamenti, è sempre possibile adottare cinghie dentate, grazie alle quali è possibile ottenere un perfetto sincronismo nella trasmissione del movimento, anche in presenza di variazioni nella tensione.

Occorre tuttavia tenere presente che, per effetto di repentine accelerazioni e di carichi elevati, una trasmissione a cinghia può presentare problemi dinamici non trascurabili, innescando vibrazioni indesiderate sui dispositivi da movimentare: ciò è dovuto essenzialmente all'elasticità del materiale utilizzato per la realizzazione della cinghia stessa. Tale problema si manifesta con maggiore evidenza qualora si adotti una trasmissione a cinghia a più stadi, in cui l'elasticità dei singoli rami può peggiorare le prestazioni globali della macchina.

Risulta quindi chiaro che, per i casi in cui viene richiesta una buona precisione di posizionamento ed un movimento esente da vibrazioni, occorre effettuare con cura il progetto della trasmissione. A tale scopo appare di estrema utilità effettuare simulazioni al computer su modelli di trasmissioni elastiche in grado di riprodurre con buona attendibilità la dinamica del sistema reale che si intende realizzare. Grazie alla simulazione è anche possibile verificare gli effetti che la legge di moto prescelta per l'azionamento produce in presenza di elasticità nella trasmissione.

Lo scopo del presente lavoro è quello di fornire un contributo allo studio di sistemi di movimentazione caratterizzati dalla presenza di elasticità nella trasmissione. In particolare si cercherà di ottenere una riduzione dei fenomeni vibratorii attraverso la scelta di una opportuna strategia di azionamento nel rispetto delle specifiche imposte dalle esigenze di progetto, in particolare per quanto riguarda i tempi di movimentazione e gli spostamenti da effettuare.

L'approccio proposto è particolarmente vantaggioso, soprattutto sotto l'aspetto della facilità di implementazione su un sistema reale: infatti non occorre effettuare modifiche meccaniche finalizzate a rendere più rigido il comportamento della trasmissione, ma si agisce sulla legge di movimento dell'attuatore che aziona il sistema, ad esempio modificando il profilo di riferimento memorizzato nel controllore elettronico che gestisce la movimentazione del motore.

I passi che occorre effettuare per implementare questa tecnica vengono qui brevemente riassunti:

- schematizzare il sistema meccanico mediante un opportuno modello matematico;
- definire un indice di performance che permetta di valutare in modo quantitativo l'entità della vibrazione a cui è soggetto il sistema durante il funzionamento;
- scegliere una categoria di funzioni parametriche all'interno della quale si possa individuare la legge di moto del motore in grado di ottimizzare l'indice di performance precedentemente definito;
- utilizzare un procedimento di calcolo automatizzato per poter scegliere rapidamente la legge di moto migliore.

Nel seguito si analizzeranno nei dettagli i punti sopra elencati e si presenterà un esempio di applicazione della tecnica proposta.

2 MODELLO MATEMATICO

Per effettuare l'analisi dinamica di una trasmissione a cinghia in cui sono presenti elementi con elasticità non trascurabile si utilizzano solitamente modelli a parametri concentrati con più gradi di libertà. A conferma di tale affermazione possiamo citare il lavoro di Iwatsubo *et al.* [1], in cui si analizzano trasmissioni a cinghia con geometrie complesse e si propone un algoritmo per la scrittura automatica delle equazioni di moto di un sistema avente un numero arbitrario di cinghie e di pulegge. Un altro esempio è costituito dal lavoro di Lee e Rutherford [2], in cui si analizza un robot *low-cost* azionato da una trasmissione a cinghia, ricavandone il modello dinamico e un possibile algoritmo per il controllo dell'attuatore.

In linea generale la deduzione delle equazioni di moto, ottenibili tramite considerazioni di equilibrio dinamico oppure tramite l'approccio lagrangiano, non presenta particolari problemi. Solitamente si ritengono valide le seguenti ipotesi:

- ciascun ramo della cinghia viene modellizzato mediante una molla lineare in parallelo con uno smorzatore viscoso; la rigidezza k di ciascun ramo della cinghia si può determinare tramite la relazione $k = EA/L$, dove E , indica il modulo di Young del materiale costituente la cinghia, A l'area della sua sezione trasversale ed L la lunghezza del ramo in esame. Il coefficiente di smorzamento c , può essere determinato sperimentalmente attraverso prove di vibrazione libera, deformando assialmente la cinghia e successivamente rilasciandola (la vibrazione può essere rilevata tramite un accelerometro montato direttamente sul ramo della cinghia oppure utilizzando un sistema ottico per il rilevamento delle vibrazioni senza contatto);
- la massa della cinghia si ritiene trascurabile rispetto a quella delle pulegge;
- la trasmissione del moto avviene in condizioni cinematiche ideali (assenza di slittamento della cinghia sulle pulegge);
- la cinghia risulta priva di rigidezza flessionale.

Come avviene in tutti i casi in cui si effettua una modellizzazione teorica di un sistema reale, occorre determinare con buona accuratezza i valori dei parametri fisici del sistema, al fine di ottenere un modello affidabile e quindi in grado di riprodurre fedelmente i fenomeni osservabili nella realtà.

A titolo di esempio si mostra in Fig. 1 un sistema di movimentazione costituito da una piattaforma rotante azionata da un servomotore mediante una doppia trasmissione a cinghia ed un riduttore di velocità intermedio.

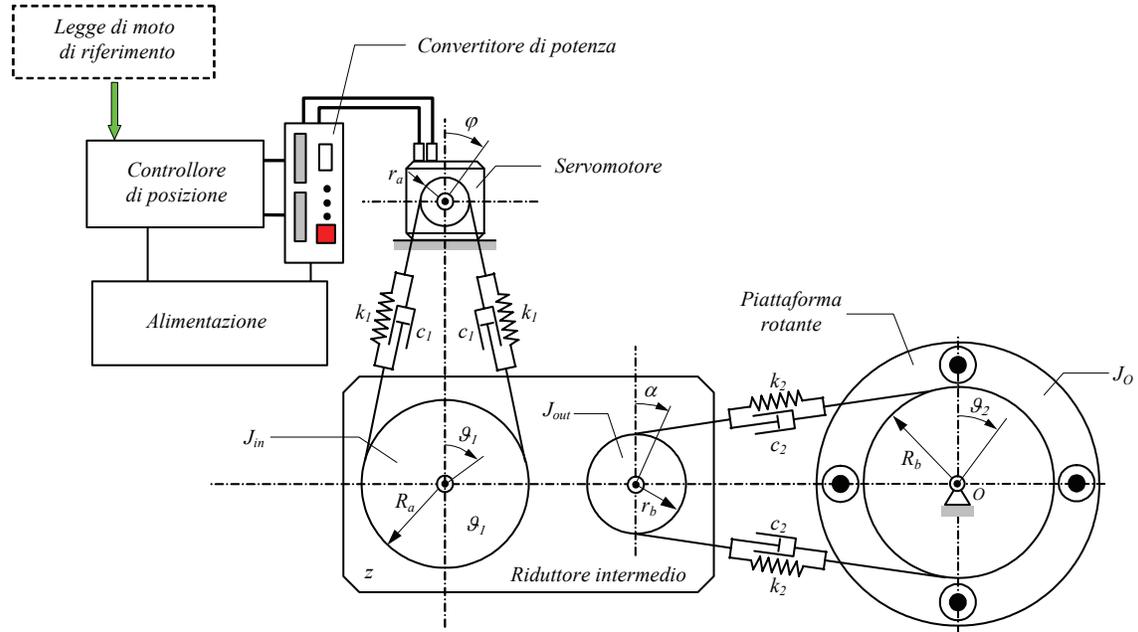


Figura 1: Piattaforma rotante azionata da un servomotore tramite una doppia trasmissione a cinghia ed un riduttore di velocità intermedio a ruote dentate.

Osserviamo che il sistema possiede due gradi di libertà effettivi, rappresentati dalle coordinate angolari ϑ_1 e ϑ_2 ; infatti la rotazione φ del motore è nota (essendo imposta dal controllore elettronico del moto), mentre la rotazione α all'uscita del riduttore è proporzionale alla rotazione in ingresso ϑ_1 secondo il rapporto di trasmissione z ($\alpha = z\vartheta_1$).

La dinamica del sistema in esame può essere studiata mediante le equazioni di Lagrange, che assumono la forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\vartheta}_i} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

in cui i simboli T , D e V indicano rispettivamente l'energia cinetica del sistema, la funzione di dissipazione di Rayleigh e l'energia potenziale dovuta alla deformazione elastica dei rami delle cinghie. Utilizzando i simboli elencati nella Tabella 1 l'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2} \left[(J_{in} + z^2 J_{out}) \dot{\vartheta}_1^2 + J_O \dot{\vartheta}_2^2 \right] \quad (2)$$

Descrizione	Simbolo
Momento d'inerzia della puleggia all'ingresso del riduttore	J_{in}
Momento d'inerzia della puleggia all'uscita del riduttore	J_{out}
Momento d'inerzia complessivo delle masse rotanti attorno al perno O	J_O
Raggi delle pulegge	r_a, r_b, R_a, R_b
Rigidezza dei rami delle cinghie	k_1, k_2
Costanti di smorzamento dei rami delle cinghie	c_1, c_2
Rapporto di trasmissione del riduttore centrale	z
Rotazione della puleggia motrice	φ
Rotazione della puleggia all'ingresso del riduttore centrale	ϑ_1
Rotazione della puleggia all'uscita del riduttore centrale	α
Rotazione della piattaforma	ϑ_2

Tabella 1: Parametri e variabili del sistema rappresentato in Fig. 1.

mentre l'energia potenziale e la funzione di Rayleigh assumono la forma sotto riportata:

$$V = k_1(R_a\vartheta_1 - r_a\varphi)^2 + k_2(R_b\vartheta_2 - r_bz\vartheta_1)^2 \quad (3)$$

$$D = c_1(R_a\dot{\vartheta}_1 - r_a\dot{\varphi})^2 + c_2(R_b\dot{\vartheta}_2 - r_bz\dot{\vartheta}_1)^2 \quad (4)$$

Sostituendo le espressioni sopra riportate nelle equazioni di Lagrange (1) si ottengono le equazioni di moto del dispositivo rappresentato schematicamente in Fig. 1: si tratta di un sistema di equazioni differenziali lineari che, utilizzando la notazione matriciale, può essere espresso nella forma seguente:

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{Q} \quad (5)$$

in cui i simboli \mathbf{J} , \mathbf{C} e \mathbf{K} indicano rispettivamente le matrici di inerzia, di smorzamento e di rigidezza, \mathbf{Q} indica il vettore dei termini forzanti, mentre $\boldsymbol{\vartheta} = \{\vartheta_1 \vartheta_2\}^T$ indica il vettore contenente le variabili di posizione angolare. Le espressioni dettagliate delle matrici suddette e del vettore \mathbf{Q} sono riportate in appendice.

Se è nota la legge di moto $\varphi(t)$ con cui viene azionato il motore, è possibile risolvere il sistema lineare delle equazioni di moto (5): in particolare, se si utilizza una procedura di integrazione numerica per equazioni differenziali ordinarie, la risoluzione delle equazioni di moto risulta abbastanza agevole. Estendendo l'intervallo di simulazione oltre il tempo di azionamento t_f è possibile calcolare l'andamento nel tempo della vibrazione residua.

3 SCELTA DELLA LEGGE DI MOTO

In questo paragrafo viene affrontato il tema relativo alla scelta della legge di moto dell'attuatore che aziona il sistema meccanico in cui è presente una trasmissione a cinghia con elasticità non trascurabile. Per inquadrare il problema occorre innanzitutto sottolineare la necessità di utilizzare leggi di movimentazione definibili in forma parametrica, al fine di poter variare la forma del profilo mediante la modifica di alcuni coefficienti numerici; ovviamente sarà necessario rispettare le specifiche di progetto per quanto riguarda i valori dello spostamento da compiere e del tempo di movimentazione.

Nella letteratura tecnica dedicata alla movimentazione di dispositivi meccanici [3] [4] sono numerosi gli esempi di leggi di moto definite attraverso una serie di coefficienti numerici: ad esempio, nelle leggi di moto trapezoidali si utilizzano sette parametri reali e positivi che permettono di definire in modo univoco la forma del diagramma dell'accelerazione; nelle leggi polinomiali, i coefficienti sono numeri interi positivi che rappresentano gli esponenti dei vari termini costituenti il polinomio. Esistono anche leggi di movimento definite con l'ausilio di funzioni armoniche, ed in tal caso i coefficienti che definiscono il profilo sono calcolabili mediante le note formule dello sviluppo in serie di Fourier (opportunamente arrestato all'n-esima armonica).

A prescindere dal tipo di definizione matematica adottata, gli autori concordano sul fatto che la legge di moto impiegata per una data movimentazione deve garantire un funzionamento *dolce*, ovvero esente da urti e brusche variazioni delle azioni d'inerzia, ovvero da tutti quei fenomeni che favoriscono l'innescio di fenomeni vibratorii.

In questa sede viene introdotta una particolare classe di leggi di moto, derivata dalle leggi polinomiali standard, ma con la particolarità di avere come esponenti valori reali e positivi (non necessariamente interi, come avviene nelle leggi polinomiali). L'utilizzo di tali leggi di moto sembra vantaggioso, soprattutto per quanto riguarda la possibilità di ridurre le vibrazioni residue [5]. Per convenzione indicheremo con il termine *pseudo-polinomiali* le leggi di moto appartenenti a questa classe, per mettere in evidenza, al tempo stesso, le analogie e le differenze rispetto ad una funzione polinomiale standard.

Occorre fin d'ora sottolineare che gli esponenti suddetti (definiti *coefficienti di forma*) possono essere variati dall'utente senza alterare le condizioni agli istanti $t = 0$ (iniziale) e $t = t_f$ (finale).

Nel seguito si riporta in sintesi la procedura di calcolo generalizzata che consente di definire la forma del profilo. Per generare il profilo di spostamento $y(t)$ si utilizza la funzione:

$$y(t) = h \left[1 - \sum_{i=0}^n X_i \left(1 - \frac{t}{t_f} \right)^{\lambda_i} \right] \quad (6)$$

in cui i simboli h e t_f indicano rispettivamente lo spostamento da compiere ed il tempo di azionamento, mentre n indica il massimo ordine della derivata su cui si vogliono garantire le condizioni di continuità. Gli esponenti λ_i rappresentano i parametri su cui agire per modificare la forma del profilo $y(t)$, mentre le costanti X_i sono opportuni coefficienti numerici calcolabili in base ai valori λ_i assegnati.

Partendo dalla (6) è possibile ricavare la seguente formula generalizzata per il calcolo della derivata temporale di ordine k ($1 \leq k \leq n$):

$$y^{(k)}(t) = (-1)^{k+1} \frac{h}{t_f^k} \left\{ \sum_{i=0}^n \gamma(\lambda_i, k) X_i \left(1 - \frac{t}{t_f} \right)^{\lambda_i - k} \right\} \quad (7)$$

dove

$$\gamma(\lambda_i, k) = \prod_{r=0}^{k-1} (\lambda_i - r) \quad (8)$$

Si può subito osservare che, per $t = t_f$, la funzione y è uguale allo spostamento totale h , mentre le sue derivate temporali fino all'ordine n sono nulle; i coefficienti X_i possono essere calcolati imponendo le condizioni:

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dots = y^{(n)}(0) = 0 \quad (9)$$

Operando in tal modo si perviene al seguente sistema lineare di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n X_i = 1 \\ \sum_{i=0}^n \gamma(\lambda_i, k) X_i = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (10)$$

che può essere riscritto, con notazione matriciale, nella forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (11)$$

in cui $\mathbf{x} = (X_0 \ X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T$, $\mathbf{b} = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ mentre \mathbf{A} è una matrice quadrata di ordine $n + 1$ definita nel modo seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_0(\lambda_0 - 1) & \lambda_1(\lambda_1 - 1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n - 1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma(\lambda_0, n) & \gamma(\lambda_1, n) & \dots & \gamma(\lambda_n, n) \end{pmatrix} \quad (12)$$

Si osservi che la matrice \mathbf{A} presenta una struttura tale da poter essere facilmente compilata in modo automatico tramite elaboratore.

È importante osservare che la funzione $y(t)$ e le sue derivate temporali dipendono dai valori assegnati ai parametri λ_i ; se tali parametri assumono valori interi positivi, si ottengono le classiche funzioni polinomiali, frequentemente utilizzate per il progetto di sistemi a camma o per definire le leggi di moto di riferimento degli attuatori elettromeccanici utilizzati nei manipolatori robotici o in altre macchine automatiche.

Al contrario, se i parametri λ_i assumono valori non interi, ma sempre positivi, le corrispondenti funzioni non sono più polinomi, anche se, dal punto di vista computazionale, esse possono essere ancora calcolate tramite la procedura descritta precedentemente.

È possibile generare nuove funzioni se i parametri di forma vengono modificati opportunamente; la scelta dei parametri può essere effettuata tramite una procedura di calcolo automatica, in modo da ottimizzare una opportuna funzione obiettivo.

4 ELIMINAZIONE DELLE VIBRAZIONI RESIDUE

Come si è detto l'effetto di *overshooting* è una vibrazione libera che si manifesta al termine del tratto di azionamento; in tale situazione il servomotore che aziona il sistema viene mantenuto fermo in corrispondenza della posizione finale mentre la piattaforma continua ad oscillare per effetto dell'elasticità delle cinghie di trasmissione. L'innesco della vibrazione è possibile in quanto il sistema vibrante, all'istante di tempo $t = t_f$, possiede ancora una certa quantità di energia meccanica, sotto forma di energia cinetica e di energia potenziale elastica. Tale energia viene successivamente dissipata per effetto dei fenomeni di attrito sempre presenti in un sistema meccanico reale.

In base alle considerazioni suddette appare chiaro che l'effetto di *overshooting* può essere eliminato se l'energia meccanica totale del sistema è nulla in corrispondenza dell'istante finale della movimentazione. Se non è possibile azzerare completamente il valore di tale energia, si può comunque imporre che il suo valore risulti minimo: in questo caso le vibrazioni residue si attenueranno, ma non verranno completamente eliminate.

Dal punto di vista operativo, quindi, l'energia meccanica totale all'istante finale $t = t_f$ rappresenta la funzione obiettivo da minimizzare. Nel caso di un sistema lineare a più gradi di libertà, come

Simb.	Val.	Unità mis.	Simb.	Val.	Unità mis.
J_{in}	0.1	kg m ²	c_1	300	Ns/m
J_{out}	0.2	kg m ²	c_2	300	Ns/m
J_O	1	kg m ²	r_a	50	mm
z	1:10	-	r_b	80	mm
k_1	4×10^4	N/m	R_a	150	mm
k_2	4×10^4	N/m	R_b	160	mm

Tabella 2: Valori numerici dei parametri del sistema.

quello descritto nel paragrafo 2, tale energia, indicata nel seguito con il simbolo E_f , può facilmente calcolare tramite la seguente relazione, in cui intervengono le matrici di massa e di rigidezza del sistema ed il vettori ϑ_f ed $\dot{\vartheta}_f$ contenenti i valori delle rotazioni e delle velocità angolari all'istante finale [6]:

$$E_f = \frac{1}{2} \left[\dot{\vartheta}_f^T \mathbf{J} \dot{\vartheta}_f + \vartheta_f^T \mathbf{K} \vartheta_f \right] \quad (13)$$

Il valore di E_f varia quando si modifica la legge di azionamento $\varphi(t)$ del motore; avendo a disposizione una legge di moto definita in forma parametrica attraverso i coefficienti di forma (vedi paragrafo 3), l'energia finale dipenderà da tali parametri, che potranno essere opportunamente selezionati per ottenere una condizione di minimo. Si può osservare che il problema qui presentato è un classico problema di ottimizzazione, per la cui risoluzione esistono appositi algoritmi di calcolo, che consentono di determinare un minimo o un massimo locale per la funzione obiettivo, in assenza o in presenza di particolari vincoli sulle variabili [7].

5 RISULTATI

Vengono qui presentati alcuni risultati numerici ottenuti mediante la tecnica di pianificazione del moto precedentemente descritta. I calcoli sono stati svolti utilizzando i dati riportati in Tabella 2 ed impiegando per il comando del servomotore una legge di moto pseudo-polinomiale con tre parametri, calcolata utilizzando le equazioni riportate nel paragrafo 3. Il tempo di movimentazione t_f è stato fissato a 1 secondo, mentre la rotazione del motore è stata impostata a 30 giri, corrispondenti a 180 gradi di rotazione della piattaforma (tenendo conto del rapporto di trasmissione globale, calcolato nell'ipotesi di cinghie perfettamente rigide).

Per minimizzare l'energia finale E_f è stato impiegato un algoritmo di ottimizzazione *Quasi-Newton*, utilizzando come parametri iniziali i valori $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 5$, corrispondenti ad una legge di moto polinomiale con condizioni di continuità fino alla derivata seconda. Al termine del processo di ottimizzazione si sono ottenuti i seguenti valori: $\lambda_0 = 4.225$, $\lambda_1 = 5.492$ e $\lambda_2 = 6.648$.

In Figura 2 sono riportati i risultati ottenuti prima e dopo il procedimento di ottimizzazione: il confronto fra i diagrammi nelle colonne di sinistra e destra mostra chiaramente che la vibrazione scompare quando si impiega una legge di moto ottimizzata.

6 CONCLUSIONI

L'articolo ha presentato una tecnica di pianificazione del movimento che consente di ridurre i fenomeni vibratorii di dispositivi azionati da trasmissioni a cinghia. La procedura di calcolo utilizza un modello dinamico del dispositivo, una classe di leggi di moto parametriche ed un algoritmo di ottimizzazione che viene utilizzato per minimizzare l'energia meccanica totale del sistema (al

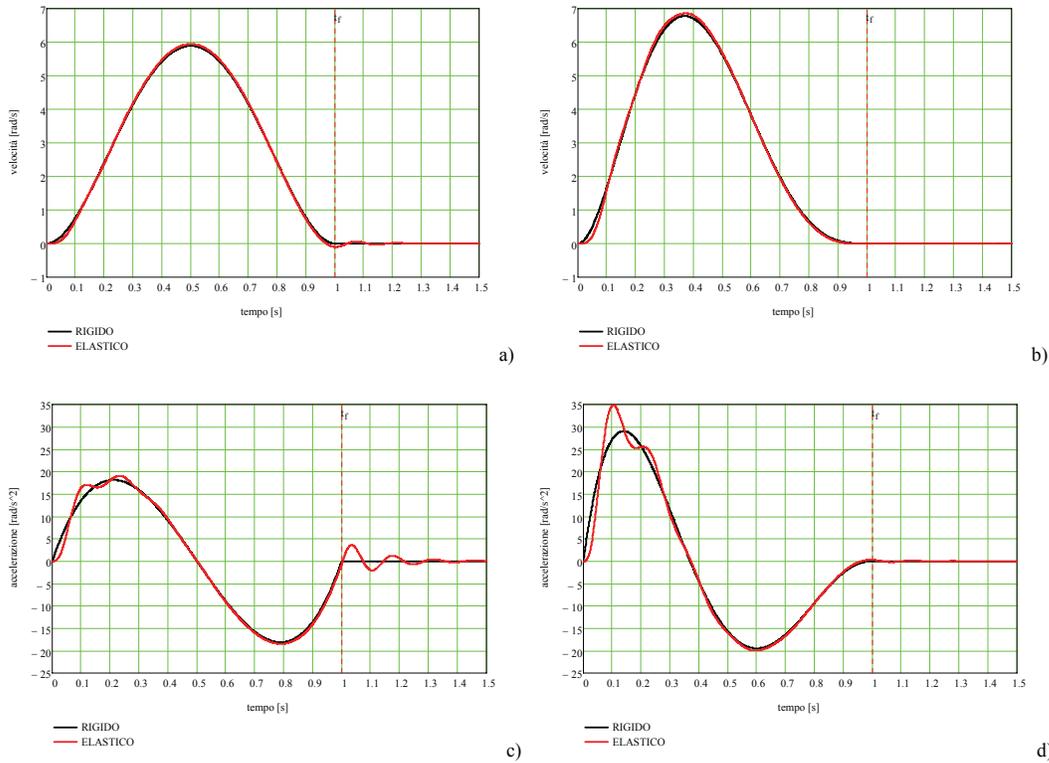


Figura 2: Comportamento dinamico del sistema in Fig. 1 a seguito dell'utilizzo di una legge di moto non ottimizzata (grafici nella colonna a sinistra) e di una legge ottimizzata (grafici nella colonna a destra). **a, b**) velocità angolare $\dot{\vartheta}_2(t)$ della piattaforma rotante; **c, d**) accelerazione angolare $\ddot{\vartheta}_2(t)$ della piattaforma rotante. Le curve in colore nero indicano il movimento della piattaforma nel caso di sistema perfettamente rigido. Si osservi, nei grafici a destra, l'assenza di vibrazione per $t > 1$ s.

termine dell'intervallo di azionamento), al fine di ridurre le vibrazioni residue.

La deduzione del modello matematico può essere effettuata con le metodologie comunemente impiegate nell'ambito della dinamica delle macchine e pertanto non presenta difficoltà di rilievo; occorre però sottolineare che, per ottenere un modello rispondente alla realtà, occorre porre attenzione alla definizione dei parametri fisici del sistema vibrante, in particolare per quanto riguarda i valori delle rigidità dei rami delle cinghie e i valori delle corrispondenti costanti di smorzamento.

La deduzione analitica delle leggi di moto non richiede onerosi sviluppi analitici, in quanto le funzioni impiegate derivano dalle leggi polinomiali standard, utilizzando però esponenti non interi.

Le procedure di ottimizzazione deve essere abbinata alla procedura di integrazione delle equazioni differenziali, in quanto la funzione obiettivo E_f , definita nel paragrafo 4, dipende dai valori delle posizioni e delle velocità angolari all'istante di tempo t_f . Dal punto di vista pratico, è conveniente effettuare l'implementazione dei calcoli in un ambiente software per calcolo tecnico-scientifico, che disponga di una libreria predefinita di algoritmi per l'integrazione numerica e per la ricerca di massimi e minimi di funzioni a più variabili.

I risultati teorici presentati nel presente articolo indicano che la tecnica proposta può effettiva-

mente contribuire ad una riduzione degli effetti di *overshooting*, senza modificare i tempi di azionamento e gli spostamenti da compiere; è infatti sufficiente una modifica del profilo della legge di moto del servomotore, operazione che può essere agevolmente condotta in modo semplice ed economico agendo sulla mappatura dei profili di riferimento memorizzati nella memoria del controllore elettronico del moto.

In futuro si prevede di implementare la tecnica qui presentata su un sistema sperimentale di prova, per identificare con chiarezza i limiti di applicazione di tale metodo e gli eventuali problemi derivanti dal suo impiego su un dispositivo reale.

7 APPENDICE

Vengono qui riportate le definizioni delle matrici \mathbf{J} , \mathbf{C} , \mathbf{K} e del vettore \mathbf{Q} che compaiono nell'equazione (5).

Matrici di inerzia e di rigidità

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{in} + z^2 J_{out} & 0 \\ 0 & J_O \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2(k_1 R_a^2 + z^2 k_2 r_b^2) & -2k_2 z r_b R_b \\ -2k_2 z r_b R_b & 2k_2 R_b^2 \end{bmatrix}$$

Matrice di smorzamento e vettore dei termini forzanti

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2(c_1 R_a^2 + z^2 c_2 r_b^2) & -2c_2 z r_b R_b \\ -2c_2 z r_b R_b & 2c_2 R_b^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} 2r_a R_a [k_1 \varphi(t) + c_1 \dot{\varphi}(t)] \\ 0 \end{array} \right\}$$

Bibliografia

- [1] Iwatsubo T., Hasegawa K., Arii S., Shiohata K., *The Formulation and Dynamic Analysis of a Multiple Belt System*, *Journal of Sound and Vibration*, **205**(3), 293-307 (1997).
- [2] Lee K.M., Rutherford C., *Frequency reshaped quadratic control of a low-cost human level performance belt-driven robot*, *Mechatronics*, **9**, 95-110 (1999).
- [3] Magnani P.L., Ruggieri G., *Meccanismi per macchine automatiche*, UTET, Torino (1986).
- [4] Norton R.L., *Cam design and manufacturing handbook*, Industrial Press Inc., New York (2002).
- [5] Incerti G., *An Optimization Technique for Vibration Damping of Electro-Mechanical Positioning Systems*, 9th International Workshop on Research and Education in Mechatronics (REM 2008) Bergamo, Italy, September 18-19, 2008.
- [6] Meirovich L., *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill Higher Education, New York (2001).
- [7] Rao, S.S., *Engineering Optimization - Theory and Practice*, John Wiley & Sons, New York (1996).