

# Effetti delle Caratteristiche Meccaniche della Trasmissione sulla Scelta del Motoriduttore

Hermes Giberti<sup>1</sup>, Simone Cinquemani<sup>1</sup>, Giovanni Legnani<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Politecnico di Milano, Department of Mechanical Engineering, Campus Bovisa Sud, via La Masa 34, 20156, Milano, Italy.*

*E-mail: hermes.giberti@polimi.it, simone.cinquemani@polimi.it*

<sup>2</sup>*Università degli Studi di Brescia, Department of Mechanical Engineering, 38 via Branze, 20145, Brescia, Italy.*

*E-mail: giovanni.legnani@ing.unibs.it*

**Keywords:** Servomotore, Rapporto di Trasmissione Ottimo, Rendimento Meccanico, Accoppiamento Motore-Riduttore.

**SOMMARIO.** Il presente lavoro affronta gli effetti del rendimento e dell'inerzia della trasmissione sull'accoppiamento tra carico e motore. Le relazioni intercorrenti tra gli elementi costitutivi di una generica macchina sono studiate facendo ricorso a parametri in grado di descrivere le prestazioni di un motore, la richiesta di potenza da parte del sistema e l'influenza delle caratteristiche meccaniche della trasmissione sull'accoppiamento motore-trasmissione. La conoscenza di tali reciproche influenze è finalizzata all'analisi critica delle metodologie con cui si scelgono motori e riduttori e all'identificazione di contorni all'interno dei quali queste sono verificate. Vengono infine suggerite delle linee guida con cui scegliere motore e riduttore affiancando la trattazione teorica con grafici in grado di valutare l'influenza del motoriduttore sulle performance della macchina e guidare il progettista alla soluzione, mostrando tutte le possibili alternative.

## 1 INTRODUZIONE

La scelta di un motore elettrico necessario alla realizzazione di un task è strettamente legato alla scelta della trasmissione: tale operazione, infatti, oltre ad essere vincolata dalle limitazioni imposte dal campo di lavoro del motore, è soggetta ad una serie di vincoli che dipendono indirettamente dal motore stesso (attraverso la propria inerzia  $J_M$ ) e dal riduttore (attraverso il rapporto di trasmissione  $\tau$ , il rendimento meccanico  $\eta$  e l'inerzia  $J_T$ ), la cui scelta è l'obiettivo del lavoro.

L'individuazione di un corretto accoppiamento di motore e riduttore per un determinato carico è stata affrontata da alcuni autori definendo diverse metodologie di scelta che tuttavia trascurano, almeno nella fase di individuazione della soluzione, alcuni importanti effetti riguardanti le caratteristiche meccaniche della trasmissione. Tra i principali si ricordano [1-6]. In tali procedure la trasmissione è approssimata ad un sistema ideale in cui vengono considerate nulle le perdite di potenza legate al rendimento del riduttore e gli effetti legati all'inerzia della trasmissione stessa. Solo successivamente alla selezione del motoriduttore tali approssimazioni vengono verificate per garantire la correttezza della soluzione. Naturalmente, in caso la verifica desse un esito negativo, l'intera procedura dovrebbe essere svolta nuovamente.

Una metodologia di scelta del motoriduttore volta all'ottenimento della massima accelerazione del sistema e alla riduzione del tempo di ciclo per una particolare legge di moto è presentata in [1]. Tale procedura permette di valutare la dipendenza della soluzione da alcuni parametri caratteristici del sistema quali inerzia del motore, rapporto di trasmissione, carico, ecc.

In [2] si presenta una procedura di scelta di un motore AC sincrono a magneti permanenti e della

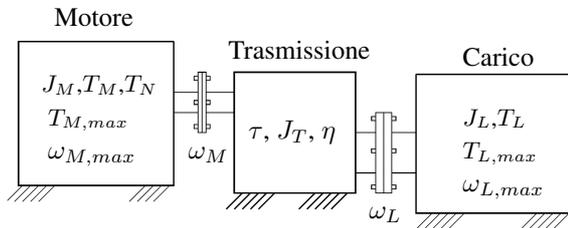


Figura 1: Schema funzionale di una generica macchina

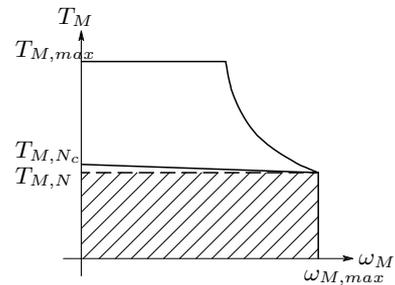


Figura 2: Campo di lavoro di un motore brushless

relativa trasmissione per un carico generico. Gli autori propongono una normalizzazione delle coppie, velocità e rapporti di trasmissione al fine di separare le caratteristiche del motore da quelle del carico. In virtù di questa normalizzazione i risultati delle simulazioni svolte per un motore standard ( $J_M = 1$  [kg m<sup>2</sup>]) possono essere applicate ad ogni motore. In [3] la stessa procedura è estesa ad ogni tipo di motore.

In [4] si affronta il problema della scelta del gruppo motore riduttore per un carico costante e si indaga l'effetto dell'inerzia della trasmissione sulla soluzione trovata. In [5] la scelta del motoriduttore è affrontata in funzione della legge di moto adottata per movimentare il carico.

Similmente in [6] si valuta il guadagno in termini di coppia motrice relativo alla ottimizzazione delle traiettorie da percorrere e l'effetto che l'inserimento di una trasmissione con rapporto di trasmissione variabile ha sulle prestazioni della macchina.

Altri autori hanno formalizzato una procedura di selezione del motoriduttore evidenziando un primo tentativo di considerare le inevitabili perdite di potenza legate al rendimento della trasmissione: In [7] la metodologia di approccio al problema suggerisce di definire un coefficiente di merito a ciascun motore disponibile a catalogo, e di confrontarlo con un termine che sia rappresentativo della condizione di carico cui è sottoposto il sistema. Nella procedura, il rendimento della trasmissione viene ipotizzato pari ad un valore ipotetico, ragionevolmente associabile al tipo di trasmissione utilizzato. In [8] si ipotizza che tutte le trasmissioni candidate all'applicazione abbiano un rendimento simile; tale valore approssimato è utilizzato ai fini della procedura di selezione.

Nessuno dei lavori citati, tuttavia, definisce formalmente gli effetti del rendimento e dell'inerzia della trasmissione sul dimensionamento dell'accoppiamento motore e riduttore. Questo lavoro ha l'intento di evidenziare tali effetti permettendo così di considerare il rendimento e l'inerzia della trasmissione come parametri di progetto, anziché effetti marginali sui quali compiere una verifica nella fase conclusiva della selezione.

## 2 L'ACCOPIAMENTO MOTORE E CARICO

Una macchina è un sistema, generalmente complesso, in grado di compiere un determinato lavoro. Indipendentemente dal tipo di macchina in esame, essa può essere scomposta in sottosistemi più semplici, ciascuno in grado di azionare un solo grado di libertà. Ognuno di essi è schematizzabile con tre elementi fondamentali: il motore, la trasmissione e il carico (fig. 1). Mentre le condizioni di carico sono completamente note, poichè dipendono dal task che la macchina deve compiere, le caratteristiche meccaniche di motore e trasmissione sono incognite.

## 2.1 Il motore

I motori brushless sono tra gli attuatori più diffusi nel campo dell'automazione. Il loro campo di lavoro (fig. 2) può essere suddiviso in una zona caratterizzata da un funzionamento *continuo*, limitata dalla coppia continuativa, e da una zona a funzionamento *intermittente*, limitata dalla coppia massima  $T_{M,max}$  che il motore è in grado di erogare. Generalmente la coppia continuativa diminuisce lentamente all'aumentare della velocità del motore  $\omega_M$  da  $T_{M,N_c}$  a  $T_{M,N}$ . Per semplificare tale andamento si utilizza generalmente un approccio cautelativo considerando la coppia continuativa costante in tutto il campo di lavoro e pari a  $T_{M,N}$  (coppia nominale). La coppia  $T_{M,N}$  è un dato che può essere ottenuto facilmente dai cataloghi dei costruttori di motori ed è definita come la coppia che può essere erogata dal motore per un tempo indefinito senza dare problemi di surriscaldamento. Viceversa, l'andamento della coppia massima  $T_{M,max}$  è molto complesso e dipende da numerosi fattori. Per questo motivo essa è difficilmente esprimibile con una sola equazione. Frequentemente nelle applicazioni industriali il task della macchina è ciclico con periodo  $t_a$  molto inferiore alla costante termica del motore. Definito il task che la macchina deve compiere, un motore è accettabile solo se:

1. la massima velocità richiesta al motore è inferiore a  $\omega_{M,max}$  (massima velocità raggiungibile dal motore);

$$\omega_M \leq \omega_{M,max} \quad (1)$$

2. la norma p della coppia motrice richiesta  $\|T_M(t)\|_p$  è minore del corrispondente limite del motore  $T_p$ .

Le norme che hanno un significato fisico, relativamente alla coppia motrice, sono [2]:

$$\|T_M(t)\|_2 = T_{rms} = \left( \frac{1}{t_a} \int_0^{t_a} T_M^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$\|T_M(t)\|_\infty = T_{Max} = \max |T_M(t)| \quad 0 \leq t \leq t_a \quad (3)$$

Poichè la coppia motrice è proporzionale alla corrente di alimentazione, la norma 2 è una misura della corrente quadratica media che attraversa gli avvolgimenti, mentre la norma  $\infty$  è una misura della corrente di picco. Il limite della norma 2 è la coppia nominale  $T_{M,N}$ , mentre quello per la norma  $\infty$  è dato dalla massima coppia esercitabile  $T_{M,max}$ . Tali limiti si traducono in:

$$T_{rms} \leq T_{M,N} \quad (4)$$

$$T_{Max} \leq T_{M,max} \quad (5)$$

Come si può notare, mentre i termini a destra delle disequazioni (1), (4), (5) sono caratteristici di ciascun motore,  $\omega_M$ ,  $T_{rms}$  e  $T_{Max}$  dipendono dal task che deve essere svolto e dalle caratteristiche meccaniche di motore e riduttore ( $J_M$ ,  $\tau$ ,  $\eta$ ,  $J_T$ ).

## 2.2 La trasmissione

La potenza meccanica è data dal prodotto di una coppia (fattore estensivo) per una velocità (fattore intensivo). Poichè in generale risulta più conveniente produrre potenza meccanica con piccole coppie ad elevate velocità, la trasmissione assolve al compito di modificare la ripartizione della potenza fra i suoi fattori estensivi ed intensivi, adattando le condizioni ottimali per la sua produzione a

quelle ottimali per la sua utilizzazione. Tale operazione, in genere, corrisponde a ridurre la velocità elevando nel contempo la coppia disponibile.

La scelta della trasmissione da accoppiare ad un motore per l'azionamento di un carico noto dipende, oltre che dal rapporto di trasmissione  $\tau$ , anche da altri fattori tra cui il rendimento della trasmissione  $\eta$  e il suo momento d'inerzia  $J_T$  [8]. Generalmente [1, 2, 3, 4, 5], nella selezione del motoriduttore, la trasmissione è approssimata ad un sistema ideale in cui siano considerate nulle le perdite di potenza ( $\eta = 1$ ) e le inerzie ( $J_T = 0$ ).

Un modello più realistico della trasmissione deve tener conto delle inevitabili perdite di potenza per consentire di valutare quanto esse influiscano sul corretto dimensionamento del motoriduttore e sul conseguente funzionamento complessivo della macchina.

In generale, le trasmissioni sono organi molto complessi e tali risultano essere anche i fattori responsabili delle perdite di potenza. Spesso, tuttavia, ci si limita a tenerne conto tramite il rendimento meccanico  $\eta$  definito come il rapporto tra la potenza uscente dalla trasmissione  $W_{out}$  e quella entrante  $W_{in}$ , o per mezzo dei fattori estensivi ( $T_{in}$ ,  $T_{out}$ ) ed intensivi ( $\omega_{in}$ ,  $\omega_{out}$ ) della potenza stessa:

$$\eta_{in} = \frac{W_{out}}{W_{in}} = \frac{T_{out} \omega_{out}}{T_{in} \omega_{in}} = \mu \tau \leq 1 \quad \text{in cui} \quad \tau = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \quad \mu = \frac{T_{out}}{T_{in}} \quad (6)$$

e  $T_{in}$ ,  $\omega_{in}$ ,  $T_{out}$ ,  $\omega_{out}$  sono rispettivamente la coppia e la velocità angolare in ingresso e in uscita dalla trasmissione. Il termine  $\mu$  prende il nome di *coefficiente di moltiplicazione delle forze*. Le dissipazioni di energia all'interno della trasmissione si traducono, a pari  $\tau$ , in una riduzione della coppia motrice disponibile a valle della trasmissione<sup>1</sup>.

Definita  $W_r$  la potenza a valle della trasmissione, una trasmissione può essere caratterizzata da differenti rendimenti:

$$\eta(W_r) = \begin{cases} \eta_d & \text{se } W_r > 0 \quad (\text{flusso di potenza diretto}) \\ 1/\eta_r & \text{se } W_r < 0 \quad (\text{flusso di potenza retrogrado}) \end{cases} \quad (7)$$

dove  $\eta_d$  e  $\eta_r$  sono ipotizzati costanti.

### 3 MODELLO MATEMATICO DI UNA MACCHINA

La descrizione del funzionamento della macchina può avvenire attraverso il bilancio di potenza. Esso può essere espresso come:

$$\eta \left( \frac{T_M}{\tau} - \frac{J_M \dot{\omega}_L}{\tau^2} \right) = T_L + (J_L + J_T) \dot{\omega}_L \quad (8)$$

Dovendo scegliere un motore ed una trasmissione da accoppiare al carico, è evidente che il rapporto di trasmissione  $\tau$ , il rendimento della trasmissione  $\eta$ , l'inerzia del motore  $J_M$  e l'inerzia della trasmissione  $J_T$  sono un'incognita del problema. L'eq.(8) può essere posta nella forma più sintetica:

$$T_M = \frac{\tau T_L^*}{\eta} + J_M \frac{\dot{\omega}_L}{\tau} \quad (9)$$

dove:

$$T_L^* = T_L + (J_L + J_T) \dot{\omega}_L \quad (10)$$

è la coppia resistente generalizzata ridotta all'albero del carico.

<sup>1</sup>Se nel caso ideale il coefficiente di moltiplicazione delle forze è  $\mu = \tau^{-1}$ , per  $\eta \neq 1$  esso diventa  $\mu' < \mu$  con una conseguente diminuzione delle coppie trasmesse ( $T'_{out} < T_{out}$ ) a parità di coppie in ingresso alla trasmissione

A seconda che il moto durante il funzionamento della macchina sia diretto o inverso, con la convenzione espressa in eq.(7), la coppia quadratica media eq.(2) risulta:

$$T_{rms,d}^2 = \tau^2 \frac{T_L^{*2}}{\eta_d^2} + J_M^2 \frac{\dot{\omega}_{L,rms}^2}{\tau^2} + 2 \frac{J_M}{\eta_d} (T_L^* \dot{\omega}_L)_{\text{medio}} \quad (11)$$

$$T_{rms,r}^2 = \tau^2 \eta_r^2 T_{L,rms}^{*2} + J_M^2 \frac{\dot{\omega}_{L,rms}^2}{\tau^2} + 2 J_M \eta_r (T_L^* \dot{\omega}_L)_{\text{medio}} \quad (12)$$

delle quali la prima, nel caso che il contributo inerziale sia prevalente rispetto a quello resistente, può essere considerata come condizione più gravosa per il motore <sup>2</sup>, e quindi quella da considerare in via cautelativa. La condizione espressa sulla coppia quadratica media eq.(4) diventa:

$$\frac{T_{M,N}^2}{J_M} \geq \frac{\tau^2}{J_M} \frac{T_{L,rms}^{*2}}{\eta^2} + J_M \frac{\dot{\omega}_{L,rms}^2}{\tau^2} + 2 \frac{(T_L^* \dot{\omega}_L)_{\text{medio}}}{\eta} \quad (16)$$

#### 4 SCELTA DELLA TRASMISSIONE

Le condizioni (1), (4), (5) possono essere espresse esplicitando altrettanti vincoli sui rapporti di trasmissione ammissibili per un determinato motore. Poichè ciascuna trasmissione è caratterizzata, oltre che dal rapporto di riduzione, anche da un rendimento meccanico e da un'inerzia, nel seguito si analizzerà come tali fattori influiscono sulle condizioni espresse in funzione di  $\tau$ .

##### 4.1 Limite sulla massima velocità raggiungibile

Ciascun motore è limitato nel proprio esercizio da una velocità massima  $\omega_{M,max}$ ; in funzione della quale è possibile definire un rapporto di trasmissione limite  $\tau_{kin}$  al di sotto del quale il sistema non è in grado di raggiungere le velocità richieste:

$$\tau > \tau_{kin} = \frac{\omega_{L,max}}{\omega_{M,max}} \quad (17)$$

##### 4.2 Limite sulla coppia quadratica media

L'equazione (16) può essere riscritta introducendo due nuovi parametri: il *fattore accelerante*

$$\alpha = \frac{T_{M,N}^2}{J_M} \quad (18)$$

che caratterizza le prestazioni fornite dall'attuatore e il *fattore del carico*:

$$\beta = 2 \left[ \dot{\omega}_{L,rms} T_{L,rms}^* + (\dot{\omega}_L T_L^*)_{\text{medio}} \right] \quad (19)$$

<sup>2</sup>Tale condizione è verificata se, dette  $T_D$  e  $T_R$  le coppie motrici istantanee rispettivamente in flusso di potenza diretto e retrogrado:

$$T_D^2 \geq T_R^2 \quad (13)$$

che può essere riscritta come:

$$T_L^{*2} \tau^2 \left( \frac{1}{\eta_d^2} - \eta_r^2 \right) + 2 J_M T_L^* \dot{\omega}_L \left( \frac{1}{\eta_d} - \eta_r \right) \geq 0 \quad (14)$$

Tale condizione risulta verificata quando  $T_L^* \dot{\omega}_L \geq 0$ . Ricordando l'espressione di  $T_L^*$  eq.(10), la eq.(13) è vera per:

$$|T_L| \leq |(J_L + J_T) \dot{\omega}_L| \quad (15)$$

ossia quando il contributo inerziale del carico è prevalente rispetto a quello resistente.

che caratterizza le prestazioni richieste dal carico (ipotizzando nulla l'inerzia della trasmissione). Entrambi i fattori sono espressi in  $W/s$ . Il coefficiente  $\alpha$  è definito esclusivamente da grandezze relative al motore e non dipende quindi dall'applicazione in esame: tale termine può essere calcolato per ogni motore e riportato nei cataloghi dei costruttori in modo da fornire al progettista una classificazione in funzione di questa grandezza. Diversamente, il coefficiente  $\beta$  dipende esclusivamente dalle condizioni di lavoro ed è una grandezza che definisce la richiesta di potenza del sistema. Introducendo  $\alpha$  e  $\beta$ , la eq.(16) diventa:

$$\alpha \geq \frac{\beta}{\eta} + \left[ \frac{T_{L,rms}^*}{\eta} \left( \frac{\tau}{\sqrt{J_M}} \right) - \dot{\omega}_{L,rms} \left( \frac{\sqrt{J_M}}{\tau} \right) \right]^2 \quad (20)$$

Poichè il termine tra parentesi quadre è sempre positivo, o al massimo nullo, il fattore accelerante  $\alpha$  deve essere sufficientemente maggiore del termine  $\beta/\eta$ . In tal caso esiste un range di rapporti di trasmissione utili calcolabile risolvendo la disequazione biquadratica (20):

$$\left( \frac{T_{L,rms}^*}{\eta^2 J_M} \right) \tau^4 + \left( \frac{\beta}{\eta} - \alpha - 2 \frac{T_{L,rms}^*}{\eta} \dot{\omega}_{L,rms} \right) \tau^2 + J_M \dot{\omega}_{L,rms}^2 \leq 0 \quad (21)$$

La disequazione (21) ha 4 soluzioni reali distinte delle quali, non interessando al verso di rotazione (e quindi il segno delle soluzioni), si considerano i soli valori positivi. Ad essi è associato un intervallo di rapporti di trasmissione compreso tra un minimo  $\tau_{min}$  ed un massimo  $\tau_{max}$  per i quali è verificata la condizione espressa dalla eq.(4):

$$\tau_{min}, \tau_{max} = \eta \sqrt{J_M} \frac{\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{\eta} + \frac{4\dot{\omega}_{L,rms} T_{L,rms}^*}{\eta}} \pm \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{\eta}}}{2T_{L,rms}^*} \quad (22)$$

$$\tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max} \quad (23)$$

Il vincolo imposto dalla eq.(20) diventa meno gravoso quando si sceglie una trasmissione opportuna, il cui rapporto  $\tau$  annulla il termine entro parentesi quadre. Per una trasmissione ideale ( $\eta = 1$ ) esso vale:

$$\tau = \tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_M \dot{\omega}_{L,rms}}{T_{L,rms}^*}} \quad (24)$$

ed è definito come *rapporto di trasmissione ottimo*. Nel caso di carico puramente inerziale ( $T_L = 0$ ) esso è riconducibile al rapporto di trasmissione  $\tau' = \sqrt{J_M/J_L}$  calcolato in [1], che permette di massimizzare l'accelerazione del sistema o, a parità di accelerazione, di minimizzare la coppia motrice. Dalla (20) si osserva che, per una trasmissione reale ( $\eta < 1$ ), il rapporto di trasmissione ottimo decresce col diminuire del rendimento secondo la:

$$\tau_{opt,\eta} = \sqrt{\frac{J_M \dot{\omega}_{L,rms}}{T_{L,rms}^*}} \eta = \tau_{opt} \sqrt{\eta} \quad (25)$$

### 4.3 Limite sulla coppia massima

Ciascun motore è in grado di erogare una coppia massima  $T_{M,max}(\omega_M)$  variabile in funzione della velocità di funzionamento. Per effetto di tale dipendenza risulta difficile esprimere la condizione (5) come range di rapporti di trasmissione adottabili. Per questo motivo ci si limita a verificare la massima coppia richiesta al motore solo dopo aver scelto il motore e la relativa trasmissione.

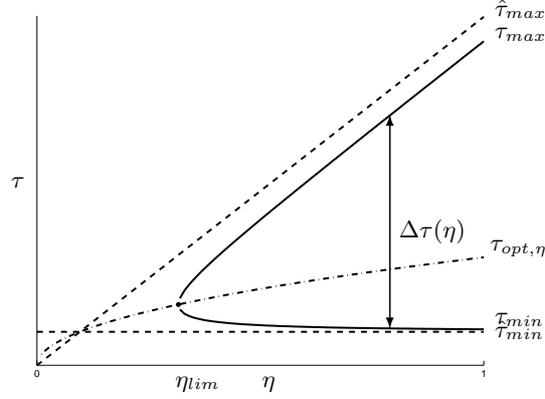


Figura 3: Andamento di  $\tau_{min}$  e  $\tau_{max}$  in funzione del rendimento, per un determinato motore.

## 5 DIAGRAMMA $\eta\tau$

### 5.1 Variazione dell'intervallo di rapporti di trasmissioni utili

Per ciascun motore candidato all'applicazione è possibile rappresentare graficamente l'andamento dei rapporti di trasmissione massimo e minimo eq.(22), evidenziando una regione di piano all'interno della quale risulta soddisfatta la condizione sulla coppia quadratica media eq.(23) (fig.3).

Sul medesimo grafico è riportato l'andamento del rapporto di trasmissione ottimo  $\tau_{opt,\eta}$  e l'ampiezza  $\Delta\tau$  dell'intervallo al variare di  $\eta$ . E' immediato osservare che esso è tanto più ampio quanto maggiore è il fattore accelerante rispetto a quello del carico. Tale ampiezza vale:

$$\Delta\tau(\eta) = \frac{2\sqrt{J_M}}{T_{L,rms}^*} \eta \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{\eta}} \quad (26)$$

e diminuisce sensibilmente con il rendimento della trasmissione. Tuttavia si osservi che, mentre il limite sul rapporto di trasmissione massimo  $\tau_{max}$  varia significativamente, quello sul rapporto di trasmissione minimo si mantiene pressoché costante. Tale comportamento è reso più evidente riportando sul grafico  $\eta\tau$  gli asintoti cui tendono le due funzioni descritti rispettivamente da:

$$\hat{\tau}_{max} = \frac{T_{M,N}}{T_{L,rms}^*} \eta \quad \hat{\tau}_{min} = \frac{J_M}{T_{M,N}} \dot{\omega}_{L,rms} \quad (27)$$

Si osservi che, mentre  $\hat{\tau}_{max}$  dipende dal riduttore,  $\hat{\tau}_{min}$  dipende esclusivamente dal motore in same e dalla legge di moto utilizzata.

### 5.2 Il rendimento limite

All'aumentare della potenza dissipata la potenza erogata da un determinato motore non è più sufficiente a soddisfare le richieste del carico. Accade quindi che un motore in grado di svolgere il task programmato in condizioni ideali, se accoppiato ad una trasmissione caratterizzata da uno scarso rendimento, debba essere scartato. In particolare per ciascun motore esiste un rendimento del sistema al di sotto del quale la condizione (4) non risulta più garantita. Tale valore prende il nome di *rendimento limite* ed è definito come rapporto tra il fattore del carico e il fattore accelerante:

$$\eta > \eta_{lim} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (28)$$

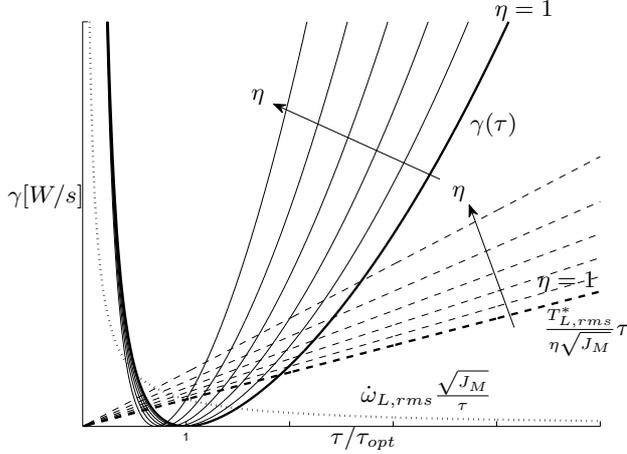


Figura 4: Influenza del rendimento sul fattore di extrapotenza e sul rapporto di trasmissione ottimo

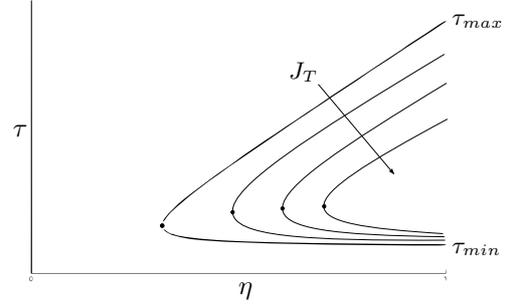


Figura 5: Effetto del momento d'inerzia della trasmissione sull'intervallo di rapporti di trasmissione accettabili

Tale condizione è verificabile sul diagramma  $\eta\tau$ : in corrispondenza del punto in cui  $\tau_{max}$  e  $\tau_{min}$  coincidono, rendendo nullo l'intervallo di trasmissioni accettabili.

Il rendimento limite fornisce un'indicazione fondamentale circa la scelta della trasmissione: individuato il task che la macchina deve svolgere (e quindi noto  $\beta$ ), per ciascun motore esiste un rendimento limite della trasmissione al di sotto del quale il sistema non è in grado di funzionare.

### 5.3 Il fattore di extrapotenza

La disequazione (20) può essere riscritta come:

$$\alpha \geq \frac{\beta}{\eta} + \gamma(\tau, \eta, J_M) \quad \text{dove:} \quad \gamma(\tau, \eta, J_M) = \left[ \frac{T_{L,rms}^*}{\eta} \left( \frac{\tau}{\sqrt{J_M}} \right) - \dot{\omega}_{L,rms} \left( \frac{\sqrt{J_M}}{\tau} \right) \right]^2 \quad (29)$$

Il termine  $\gamma$  prende il nome di *fattore di extrapotenza* e rappresenta la potenza supplementare che il sistema richiede rispetto alla condizione di ottimo ( $\tau = \tau_{opt}$ ).

In figura 4 si riportano gli andamenti dei termini relativi alla funzione  $\gamma$  al variare del rendimento. Si osserva che nell'intorno del rapporto di trasmissione ottimo la curva  $\gamma$  raggiunge una condizione di minimo. In corrispondenza di tale valore, per  $\eta = 1$ , la concavità della curva  $\gamma$  è modesta e, per variazioni anche consistenti del rapporto di trasmissione  $\tau$  dalla condizione di ottimo, il fattore di extrapotenza risulta contenuto eq.(29).

Col diminuire del rendimento, la concavità della curva  $\gamma$  è più marcata e il sistema risulta più sensibile a variazioni di  $\tau$  rispetto alle condizioni di ottimo. Per trasmissioni con rendimenti scadenti, quindi, la scelta di un rapporto di trasmissione differente da quello ottimo incide significativamente sulla scelta del relativo motore.

### 5.4 Effetto dell'inerzia della trasmissione

L'inserimento della trasmissione modifica inevitabilmente il momento d'inerzia complessivo del sistema. Detta  $J_T$  l'inerzia della trasmissione riferita all'albero lento, la coppia resistente generalizzata è data dalla eq.(10) che, introdotta nella eq.(19), consente di aggiornare il fattore del carico. Tale

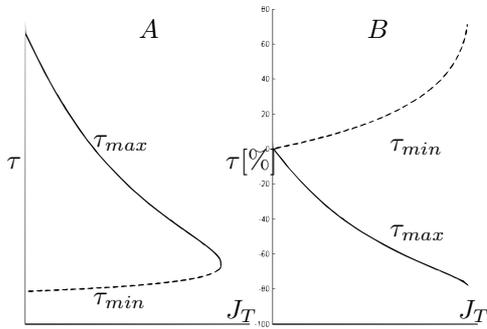


Figura 6: A - riduzione dei rapporti di trasmissione massimo e minimo con il momento d'inerzia della trasmissione; B - riduzione percentuale dei rapporti di trasmissione massimo e minimo con il momento d'inerzia della trasmissione

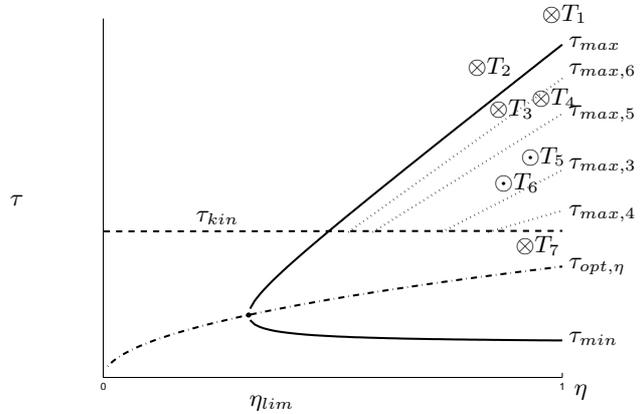


Figura 7: Diagramma  $\eta\tau$  per la scelta dell'accoppiamento motore e riduttore ( $\odot$  motore accettabile,  $\otimes$  motore non accettabile)

variazione rende il sistema differente da quello studiato precedentemente con la diretta conseguenza che la disequazione legata al vincolo sulla coppia quadratica media può non essere più soddisfatta. In figura 6 si mostra come l'intervallo di trasmissioni che soddisfano il vincolo espresso in eq. (4) si riduca all'aumentare dell'inerzia della trasmissione. La stessa riduzione può essere riportata sul diagramma  $\eta\tau$  (fig. 5).

## 6 LINEE GUIDA PER LA SCELTA DI MOTORE E TRASMISSIONE

I passi teorici presentati possono essere sintetizzati con alcuni grafici per valutare l'effetto della trasmissione sulla scelta del motoriduttore e rendere la procedura di selezione facilmente fruibile. Per garantire che la condizione espressa in (20) sia verificata, il fattore accelerante  $\alpha$  di ciascun motore candidato deve essere maggiore del termine  $\beta/\eta$ . Non avendo ancora scelto la trasmissione, ed essendo quindi incognito il valore del rendimento, in questa fase è possibile solo compiere una prima selezione dei motori accettabili, eliminando quelli per cui è  $\alpha < \beta$ . Per i rimanenti motori è possibile rappresentare sul diagramma  $\eta\tau$  (fig. 7) i vincoli sui rapporti di trasmissioni espressi dalle eq.(17), eq.(23). Ciascuna trasmissione commerciale è caratterizzata, oltre che dal proprio rapporto di trasmissione  $\tau_i$ , anche dal rendimento  $\eta_i$  misurato sperimentalmente dal costruttore e riportato sui cataloghi. Le trasmissioni candidate all'applicazione, quindi, possono essere riportate sul grafico  $\eta\tau$ , ciascuna definita tramite le sue coordinate  $(\eta_i, \tau_i)$ . Per ciascuna trasmissione è possibile aggiornare i vincoli sui rapporti di trasmissione massimo e minimo eq.(23) inserendo nelle equazioni il corrispondente valore di inerzia del riduttore (es.  $\tau_{max,5}$  corrisponde al valore del massimo rapporto di trasmissione per un riduttore con momento d'inerzia pari a quello della trasmissione indicata col numero 5). Si osservi come trasmissioni, che pur sarebbero state accettabili con le normali procedure di selezione, vengano in questo modo scartate (es.  $T_2$  a causa del rendimento insufficiente,  $T_3$  e  $T_4$  per un momento d'inerzia troppo elevata). E' interessante osservare come un motore, pur verificando tutti i vincoli finora citati, possa disporre di un range di rapporti di trasmissione utili all'interno del quale non è presente alcun riduttore disponibile a catalogo. Per tale motivo esso non potrà essere scelto.

La scelta della coppia motore-trasmissione è particolarmente agevole confrontando fra loro i diagrammi  $\eta\tau$  relativi a ciascun motore candidato all'applicazione. I grafici risultanti permettono di avere una panoramica di tutti i possibili accoppiamenti di motori e trasmissioni in grado di soddisfare le originarie condizioni di vincolo, permettendo di selezionare tra le alternative disponibili, quella ritenuta migliore secondo criteri di economicità, di riduzione dei pesi e degli ingombri, o di altri criteri ritenuti importanti a seconda dell'applicazione specifica.

Selezionati il motore e la trasmissione, e note quindi le loro caratteristiche meccaniche, è possibile compiere le normali verifiche riguardanti la coppia massima richiesta al motore, la massima corrente che l'azionamento è in grado di trasmettere al motore, la massima velocità alla quale può lavorare la trasmissione e la coppia massima applicabile all'albero lento.

## 7 CONCLUSIONI

Il corretto accoppiamento di motore elettrico e trasmissione è un fattore determinante per garantire le performance di una macchina. Tale abbinamento è fortemente vincolato dalle caratteristiche meccaniche di ciascuno dei due elementi. In questo lavoro si sono analizzati criticamente i criteri di selezione di motori e riduttori identificando i limiti di tali condizioni al dipendere del rendimento e dell'inerzia della trasmissione. Tale processo è stato condotto tramite l'identificazione di parametri in grado di descrivere le principali relazioni tra i componenti di una macchina, realizzando grafici che ne facilitano la comprensione.

Le informazioni così ricavate consentono un corretto dimensionamento del sistema permettendo di disporre sinteticamente di tutte le possibili soluzioni e di confrontarle rapidamente per scegliere efficacemente la migliore.

### Riferimenti bibliografici

- [1] Pasch, K.A., Seering, W.P., "On the drive systems for High-performance Machines", *Transactions of ASME*, **106**, 102-108 (1984).
- [2] Van de Straete, H.J, Degezelle, P., de Shutter, J., Belmans, R., "Servo Motor Selection Criterion for Mechatronic Application", *IEEE/ASME Transaction on mechatronics* **3**, 43-50 (1998).
- [3] Van de Straete, H.J, de Shutter, J., Belmans, R., "An Efficient Procedure for Checking Performance Limits in Servo Drive Selection and Optimization", *IEEE/ASME Transaction on mechatronics* **4**, 378-386 (1999)
- [4] Cusimano, G., "Optimization of the choice of the system electric drive-device-transmission for mechatronic applications", *Mechanism and Machine Theory* **42**, 48-65 (2007)
- [5] Cusimano, G., "Generalization of a method for the selection of drive systems and transmissions under dynamic loads", *Mechanism and Machine Theory* **40**, 530-558, (2005)
- [6] Van de Straete, H.J, de Shutter, J., Leuven, K.U., "Optimal Variable Transmission Ratio and Trajectory for an Inertial Load With Respect to Servo Motor Size", *Transaction of the ASME* **121**, 544-551 (1999)
- [7] Legnani, G., Tiboni, M., Adamini, R., "Meccanica degli azionamenti", Ed. Esculapio, Italy, (2002)
- [8] Roos, F., Johansson, H., Wikander, J., "Optimal selection of motor and gearhead in mechatronic application", *Mechatronics* **16**, 63-72 (2006)